ルジャンドル陪多項式

$$P_l^{|m|}(z)=\frac{1}{2^l l!}(1-z^2)^{|m|/2}\frac{d^{l+|m|}(z^2-1)^l}{dz^{l+|m|}} \qquad ①$$

が微分方程式

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_l^m}{dz}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]P_l^m=0 \qquad ②$$

の解であることを次の手順で証明せよ。まずルジャンドルの微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2P_l}{dz^2}-2z\frac{d\,P_l}{dz}+l(l+1)P_l=0 \qquad ③$$

を z でm回微分し$v=d^mP_l/dz^m$とおくと

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2(m+1)z\frac{d\,v}{dz}+[l(l+1)-m(m+1)]v=0 \qquad ④$$

となることを示し、これに$v=(1-z^2)^{-m/2}w$を代入するとwは微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{d\,w}{dz}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0 \qquad ⑤$$

を満たすことを示せ。

(解)

③式をm回 z で微分すると、ライプニッツの公式より

$$(1-z^2)\frac{d^{2+m}P_l}{dz^{2+m}}-{}_mC_1 2z\frac{d^{\,1+m}P_l}{dz^{\,1+m}}+{}_mC_2\cdot(-2)\cdot\frac{d^m\,P_l}{dz^{\,m}}-2z\frac{d^{\,1+m}P_l}{dz^{\,1+m}}-2m\frac{d^m\,P_l}{dz^{\,m}}$$

$$+l(l+1)\frac{d^m\,P_l}{dz^{\,m}}=0$$

$$\therefore(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2(m+1)z\frac{d\,v}{dz}+[l(l+1)-m(m+1)]v=0$$

④式に$v=(1-z^2)^{-m/2}w$を代入して

$$\frac{d\,v}{dz}=-\frac{m}{2}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2z)w+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{dw}{dz}$$

$$=m(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-1}zw+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{dw}{dz}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}=m\left(-\frac{m}{2}-1\right)(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-2}(-2z)zw+m(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-1}zw+m(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-1}z\frac{dw}{dz}$$

$$-\frac{m}{2}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2z)\frac{dw}{dz}+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^2w}{dz^2}$$

これらを④式に代入して⑤式が得られる。