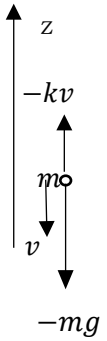
空気抵抗を受ける雨滴の落下

（雨滴を質点とみなす。）



雨滴の空気抵抗力は落下速度に比例する。

比例係数をk とすると、空気抵抗力の大きさはkv, 向きは上向きである。

運動方程式は

$$ma = -kv - mg$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v + \frac{m}{k}g\right)$$

$$\frac{dv}{v + \frac{m}{k}g} = -\frac{k}{m}dt$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dv}{v + \frac{m}{k}g} = \int -\frac{k}{m}dt$$

$$\log\left(v + \frac{m}{k}g\right) = -\frac{k}{m}t + C$$

$$v + \frac{m}{k}g = e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}e^{C}$$

$$e^{C} = C'$$

とおくと

$$v = -\frac{m}{k}g + C'e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}$$

を決めるための初期条件を

$$t = 0$$

のとき

$$v = 0$$

$$0 = -\frac{m}{k}g + C'$$

$$C' = \frac{m}{k}g$$

(答え)$v = -\frac{m}{k}g + \frac{m}{k}ge^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}$

(参考) tが十分大きいとき$e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} \to 0$より$v \to -\frac{m}{k}g$

これは最初の運動方程式　$ma = -kv - mg$　でa＝0 とおいたとき

$0 = -kv - mg$より$v = -\frac{m}{k}g$（終端速度）

となることと一致する。