

ルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + n(n+1)y = 0$$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0 \quad (2.3.1)$$

この微分方程式には2つの線形独立なべき級数解 $p(x), q(x)$ があることが期待できる

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{と} \quad q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

で表せる。 $p(x)$ と $q(x)$ の特異点は $x = \pm 1$ であり、べき級数解は少なくとも $|x| < 1$ で収束するが、それより大きい x でも収束する可能性がある。

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を式(2.3.1)の代入すると

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\{-a_n n(n-1)x^n\} + \{-2a_n n x^n\} + \{\alpha(\alpha+1)a_n x^n\} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \{n(1-n) - 2n + \alpha(\alpha+1)\} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \{-n^2 - n + \alpha(\alpha+1)\} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geq 0)$$

これらより、式(2.3.1)の2つの線形独立な解は

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad \text{と} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

は分母に $(n-j)!$ と $(2n-2j)!$ が入っている。これらは $j > n$ か $j > 2n$ のとき発散するので $P_n(x)$ は多項式を表すことになる

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$$

一般解 $y = y_1 + y_2$ は

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-2k} x^{n-2k} \\ &= a_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n!)^2 (2n-2k)!}{k!(2n)!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k+1} \\ y_2 &= (n+1)a_{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k \frac{k!(n-k)!}{(2k)!(n-2k+1)!} x^{-2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!(n+k)!}{k!(n+2k+1)!} x^{n+2k+1} \right\} \\ \left[\frac{n}{2}\right] &= \begin{cases} \frac{n}{2} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{n-1}{2} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

ただし a_n は任意の定数 $\left[\frac{n}{2}\right]$ が $p \leq \frac{n}{2}$ を満たす一番大きい正の数を表す

y_1 の a_n として $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ を採用した $P_n(x)$ を n 次のルジャンドル多項式と呼び

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-3)(2n-1)} x^{n-4} + \dots \right\} \end{aligned}$$