学士論文

1次元量子ローレンツ気体におけるボルツマン方程式と電信方程式

大阪府立大学　理学部　物理科学科　辰巳順一

目次

序論　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・1

１章. リウヴィリアンの複素スペクトル表現

１．１ 一般式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2

１．２弱結合の１次元量子完全ローレンツ気体・・・・・・・・・3

１．３ボルツマン衝突演算子の複素固有値・・・・・・・・・・・6

２章. ボルツマン方程式

２．１ボルツマン方程式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8

２．２ ボルツマン方程式の初期値問題の解の導出・・・・・・１０

３章. 電信方程式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１４

４章. ボルツマン方程式の初期値問題の解の数値計算・・・・１６

５章. 結論・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２０

引用文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２１

序論

ボルツマン方程式は古くから調べられてきたが、厳密に解かれた例はなかった。1次元量子ローレンツ気体に対しては固有値の問題から厳密に解ける。ボルツマン方程式の初期値問題の解は求められているので、初期条件にガウス波束を入力することにより透過波束の粒子成分、拡散成分及び反射波束を数値計算しグラフ化し波束の時間発展を調べる。ボルツマン方程式の初期値問題の解を求めるのに複素関数論を扱った。**1章**1．1ではリウヴィル‐フォン‐ノイマン方程式、リウヴィリアンについて述べる。また、ブリルアン‐ウィグナー‐フェッシュバッハの方法を用いてリウヴィリアンの固有値問題を衝突演算子の固有値問題に帰着させることを述べる。1．2では系のハミルトニアン、熱力学極限について述べ、還元密度行列、試験粒子の緩和率を導入し、弱結合における近似された衝突演算子による還元衝突演算子の行列要素を求めることにより,ボルツマン衝突演算子を求める。1．3ではボルツマン衝突演算子の複素固有値が純虚数から例外点を経て実部を持つことを述べる。**2章**2．1ではボルツマン方程式、ウィグナー分布関数について述べ、ボルツマン方程式の初期値問題の解が解析的に求まっていることを示す。2．2ではボルツマン方程式の初期値問題の解の導出をしめす。**3章**では電信方程式が波動方程式と拡散方程式からなることを示す。**4章**では初期条件にガウス波束を与えたボルツマン方程式の初期値問題の解を数値計算し時刻$t=0$から時刻$t=8$までの透過波束の粒子成分、拡散成分及び反射波束の振る舞いを調べる。**5章**ではまとめと結論を述べる。

１章.リウヴィリアンの複素スペクトル表現

１．１一般式

ハミルトニアンHで記述される量子系を考える。系の時間発展は密度演算子$\rho(t)$のリウヴィル‐フォン‐ノイマン方程式によって決められる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)=L_H\rho(t) \tag{1}$$

L_Hはリウヴィル‐フォン‐ノイマン演算子(リウヴィリアンと略す)で系のハミルトニアンHとの交換関係によって定義される。

$$L_H\rho\equiv\frac{1}{\hbar}[H,\rho] \tag{2}$$

リウヴィル空間において、おのおのの相関補空間は添え字kによって特定され、そのリウヴィリアンの固有値問題は次の式によって与えられる。

$$L_H\left|F_\alpha^{(k)}\right\rangle\!\rangle=z_\alpha^{(k)}\left|F_\alpha^{(k)}\right\rangle\!\rangle \qquad \langle\!\langle\tilde{F}_\alpha^{(k)}\right|L_H=\langle\!\langle\tilde{F}_\alpha^{(k)}\left|z_\alpha^{(k)}\right. \tag{3}$$

ダブルブラ‐ケットベクトルはリウヴィル空間でのベクトルを表し、添え字αはkによって記された相関補空間の固有状態を特定する。右固有状態を$\left|F_\alpha^{(k)}\right\rangle\!\rangle$とし、左固有状態を

$\langle\!\langle F_\alpha^{(k)}\right|$とする。射影演算子$P^{(k)},Q^{(k)}$を用いてブリルアン‐ウィグナー‐フェッシュバッハの方法により固有値問題を解く。射影演算子$P^{(k)},Q^{(k)}$は次を満たす。

$$P^{(k)}+Q^{(k)}=1 \tag{4}$$

(3)式に射影演算子を適用することによりリウヴィリアンの固有値問題は衝突演算子の固有値問題に帰着させることができる。

$$\Psi^{(k)}(z_\alpha^{(k)})P^{(k)}\left|F_\alpha^{(k)}\right\rangle\!\rangle=z_\alpha^{(k)}P^{(k)}\left|F_\alpha^{(k)}\right\rangle\!\rangle \tag{5}$$

ここで

$$\Psi^{(k)}(z)=P^{(k)}L_HP^{(k)}+P^{(k)}gL_VQ^{(k)}\frac{1}{z-Q^{(k)}L_HQ^{(k)}}Q^{(k)}gL_VP^{(k)} \tag{6}$$

は有効リウヴィリアンである。有効リウヴィリアンは衝突演算子とも呼ばれ非平衡力学の運動論において重要な役割をなす。固有値方程式(5)から衝突演算子の固有値はリウヴィリアンの固有値と同じである。さらに、衝突演算子はそれ自身固有値に依存するので固有値方程式は非線形である。

１．２弱結合の１次元量子完全ローレンツ気体

一般式に弱結合の１次元量子完全ローレンツ気体を適用する。ローレンツ気体は１個の軽い粒子（試験粒子） m と N 個の重い粒子 M から成る。系のハミルトニアンは次の式で表される。

$$H = H_0 + gH_V = \frac{p^2}{2m} + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2M} + g\sum_{j=1}^{N} V(|x - x_j|) \tag{7}$$

g は結合定数であり、相互作用は短い距離の反発力である。本論文では弱結合 $(g << 1)$ を考える。 $m/M \to 0$ の粒子を扱いそれは完全ローレンツ気体と呼ばれる。系を周期境界条件をもつ１次元の長さ L の閉じた箱と想定する。相互作用はフーリエ級数展開される。

$$V(|x - x_j|) = \frac{1}{L}\sum_{q} V_{|q|} e^{iq(x - x_j)} \tag{8}$$

q は $2\pi / L$ の整数倍である。

本論文では次で表される熱力学極限の状態を考える。

$$L \to \infty, N \to \infty, \frac{N}{L} = const. \tag{9}$$

重い粒子についてトレースアウトし試験粒子の自由度に注目した還元密度行列の時間発展方程式がボルツマン方程式である。還元密度行列は次の式で表される。

$$f(t) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathrm{hev}}[\rho(t)] \tag{10}$$

系の初期条件は次の式で与えられる。

$$\rho(0) = f(0) \otimes \rho_{\mathrm{hev}}^{eq} \tag{11}$$

ρ_{hev}^{eq} は温度Ｔにおける重い粒子のマックスウェル分布である。

$$\rho_{\mathrm{hev}}^{eq} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\exp(-p_j^2 / 2Mk_BT)}{\mathrm{Tr}\left[\exp(-p_j^2 / 2Mk_BT)\right]} \tag{12}$$

熱力学極限では重い粒子に関する密度演算子の時間発展は無視できる。なぜなら、 ρ_{hev}^{eq} からの偏差は $1/L$ に比例するからである。

弱結合の衝突演算子は

$$\Psi_2^{(k)} = P^{(k)} L_0 P^{(k)} + g^2 P^{(k)} L_V Q^{(k)} \frac{1}{z - L_0} Q^{(k)} L_V P^{(k)} \tag{13}$$

波数kが次を満たす系を考える。

$$|k| \le k_P \tag{14}$$

ここで、

$$k_P = \frac{1}{l_P} = \frac{\gamma}{2|P|/m}, \qquad \gamma_P = g^2 \frac{8\pi^2 mn}{\hbar^2 |P|} \left| V_{\frac{2P}{\hbar}} \right|^2 \tag{15}$$

γ_Pは試験粒子の緩和率である。フェルミの黄金律によって数値が求められる。相互作用の範囲をdとすると、dがl_Pよりもはるかに小さい場合を考える。

$$d << l_P \tag{16}$$

(8)式に現れるqの値がkよりもはるかに大きくなる。

$$|k| << |q| \tag{17}$$

弱結合$g << 1$の場合において衝突演算子を近似できる。

$$\Psi_2^{(k)}(z_\alpha^{(k)}) = \Psi_2^{(k)}(+i0) + O(g^4) \tag{18}$$

ここで、$+i0$は時間発展が$t > 0$に向くように上半面から近づく実軸上に衝突演算子の数値が求められる。

試験粒子の還元密度行列に作用する還元衝突演算子を導入する。

$$\psi^{(k)} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathrm{hev}} \left[\Psi_2^{(k)}(+i0) \rho_{\mathrm{hev}}^{eq} \right] \tag{19}$$

熱力学極限において、ウィグナー表現でのこの演算子の行列要素は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} &((k, P|\psi^{(k)}|k, P')) \\ &= \left[\frac{kP}{m} - \frac{2\pi g^2 n}{\hbar^2} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} dq V_{|q|}^2 \partial_P^{\hbar q/2} \frac{1}{+i\varepsilon - qP/m} \partial_P^{\hbar q/2} \right] \delta(P - P') \end{aligned} \tag{20}$$

試験粒子の還元状態は

$$|k; P)) = \frac{L}{2\pi\hbar} |k; P\rangle\rangle \tag{21}$$

であり、連続スペクトル表現においてデルタ関数によって規格化される。$\partial_P^{\hbar q/2}$は置換演算子で

$$\partial_P^{\hbar q/2} \equiv e^{\frac{\hbar}{2}q\frac{\partial}{\partial P}} - e^{-\frac{\hbar}{2}q\frac{\partial}{\partial P}} \tag{22}$$

$\exp[a\partial/\partial P]$は関数$P$に作用し$\exp[a\partial/\partial P]f(P) = f(P+a)$である。さらに、(20)式の分母に現れる$k$は$q$に比べると無視できる。((17)を参照)。(20)式の表現は重い粒子の温度Tに依存しないことに注目できる。これは完全ローレンツ気体の$m/M \to 0$の極限では試験粒子と重い粒子の間にエネルギーの移動が無いためである。

(20)式のqの積分を実行すると衝突演算子$\psi^{(k)}$は次のように表される。

$$((k;P|\psi^{(k)}|k;P')) = \left(\frac{kP}{m} - i\frac{\gamma_P}{2}\right)\delta(P-P') + i\frac{\gamma_P}{2}\delta(P+P') \tag{23}$$

状態$|k;P))$と$|k;-P))$の間のみ消えない行列要素を持つ。物理的には1次元では前進と後進しかないからである。

ボルツマン衝突演算子$\Psi_B^{(k)}$次のように表される。

$$\Psi_B^{(k)} = \psi^{(k)} - i\frac{\gamma_P}{2}I = \begin{pmatrix} kv - i\frac{\gamma}{2} & i\frac{\gamma}{2} \\ i\frac{\gamma}{2} & -kv - i\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{|P|}{m} \tag{24}$$

行列内のγの添え字Pは省略した。

衝突演算子は(20)式で与えられ、これは完全ローレンツ気体のボルツマン方程式と等価である。(20)式の第1項が流れ項であり、第2項が衝突項である。

１．３ボルツマン衝突演算子の複素固有値

(20)式からボルツマン衝突演算子の固有値方程式は

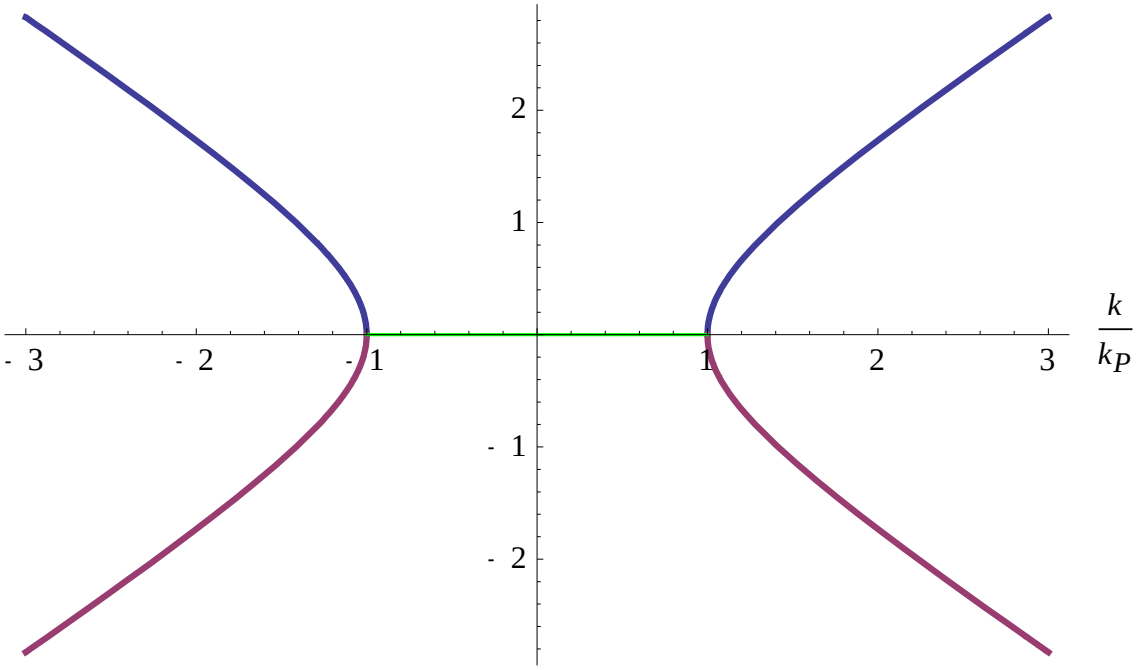
$$z^2 + i\gamma z - k^2 v^2 \tag{25}$$

となり、複素固有値は

$$z_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{k_P}\right)^2 - 1} \tag{26}$$

となる。

$$\mathrm{Re}(2z_{\pm}/\gamma)$$



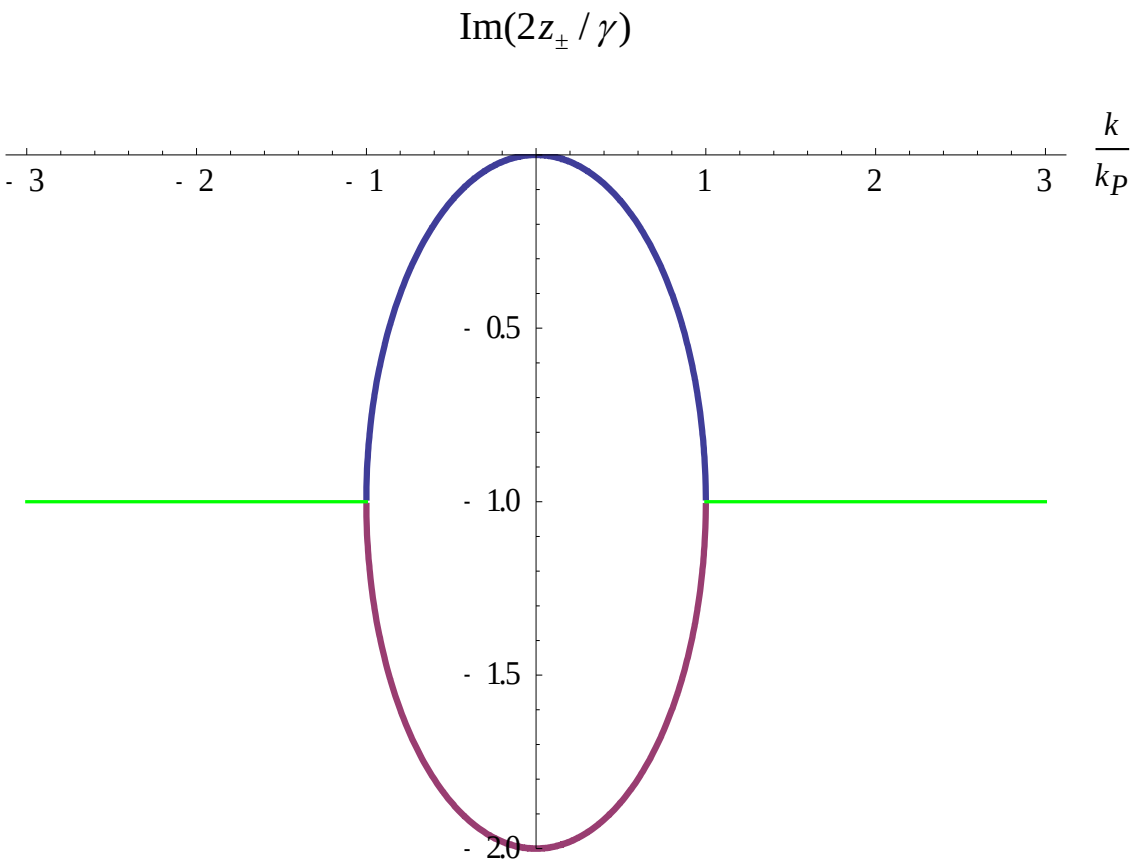


図１．ボルツマン衝突演算子のスペクトル

青色は z_+、赤色は z_-、緑色は z_+ と z_- が重なる部分を示す。

$k = k_P$ となる点は２つの固有値と固有状態が縮退し、例外点と呼ばれる。複素固有値は $k = 0$ のときは純虚数となり k を大きくしていくと縮退しその後実部をとる。

２章.ボルツマン方程式

２.１ボルツマン方程式

運動論的方程式（ボルツマン方程式）は試験粒子の自由度に注目した還元密度行列(10)の時間発展方程式である。

$$i\frac{\partial}{\partial t} f_k(p;t) = \Psi^{(k)} f_k(p;t) \tag{27}$$

分布関数を空間座標に対してフーリエ変換したのが $f_k(p;t)$ である。

$$f_k(p;t) \equiv \langle\langle k; p \left| f(t) \right\rangle\rangle = \langle p + \hbar k/2 \left| f(t) \right| p - \hbar k/2 \rangle \tag{28}$$

ウィグナー分布関数は次のように表される。

$$f(x, p;t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} f_k(p;t) \tag{29}$$

物理的に 1 次元では試験粒子の透過と反射しかない。ボルツマン方程式の初期値問題の解析的な解は次のように求められている。
透過波束は

$$\begin{aligned} f(x, p;t) &= e^{-\gamma t/2} f(x - vt, p;0) \\ &+ e^{-\gamma t/2} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \left[I_1\left(k_P \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}\right) \frac{vt + x - x'}{2\sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}} f(x', p;0) \right. \\ &\left. + \frac{k_P}{2} I_0\left(k_P \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}\right) f(x', -p;0) \right] \end{aligned} \tag{30}$$

となり、反射波束は

$$\begin{aligned} f(x, -p, t) &= e^{-\gamma t/2} f(x + vt, -p;0) \\ &+ e^{-\gamma t/2} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \left[I_1(k_P \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}) \frac{vt - x + x'}{2\sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}} f(x', -p;0) \right. \\ &\left. + \frac{k_P}{2} I_0(k_P \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}) f(x', p;0) \right] \end{aligned} \tag{31}$$

となる。

$I_0(z), I_1(z)$は変形ベッセル関数であり、ベッセル関数と次の関係を持つ。

$$I_0(z) = J_0(iz), \qquad I_1(z) = -iJ_1(iz), \tag{32}$$

(30)式の第１項が粒子成分で第２項が拡散成分である。

２．２ ボルツマン方程式の初期値問題の解の導出

ボルツマン方程式の初期値問題の解(30),(31)を導出をする。

(30)の導出

$$
\begin{aligned}
& f(x,p,t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} f_k(p,t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-k_c vt} \left[\frac{1}{2} \{ e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} + e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} \} f_k(p,0) \right. \\
&\qquad + \frac{k}{2(k^2-k_c^2)^{1/2}} \{ e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} - e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} \} f_k(p,0) \\
&\qquad \left. + \frac{ik_c}{2(k^2-k_c^2)^{1/2}} \{ e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} - e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t} \} f_k(-p,0) \right] \\
&= e^{-k_c vt} \left[\frac{1}{2} \{ \delta(x-vt) + \delta(x+vt) + I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2}) \frac{k_c vt}{\sqrt{v^2t^2-x^2}} \} \theta(vt-|x|) f_k(p,0) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \delta(x-vt) - \delta(x+vt) + I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2}) \frac{k_c x}{\sqrt{v^2t^2-x^2}} \} \theta(vt-|x|) f_k(p,0) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} I_0(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2}) \theta(vt-|x|) f_k(-p,0) \right] \\
&= e^{-k_c vt} f(x-vt, p; 0) \\
&+ e^{-k_c vt} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \left[I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2}) \frac{k_c(vt+x-x')}{\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2}} f(x', p; 0) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{k_c}{2} I_0(k_c\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2}) f(x', -p; 0) \right]
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$\theta(vt-|x|)$ は階段関数である。

$$
\theta(vt-|x|) = \begin{cases} 0 & (vt \le |x|) \\ 1 & (vt > |x|) \end{cases} \tag{34}
$$

(31)式の導出

$$
\begin{aligned}
&f(x,-p;t)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}f_k(-p,t)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}e^{-k_c vt}\Bigg[\frac{1}{2}\{e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}+e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}\}f_k(-p,0)\\
&\qquad\qquad-\frac{k}{2(k^2-k_c^2)^{1/2}}\{e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}-e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}\}f_k(-p,0)\\
&\qquad\qquad+\frac{ik_c}{2(k^2-k_c^2)^{1/2}}\{e^{-iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}-e^{iv(k^2-k_c^2)^{1/2}t}\}f_k(p,0)\Bigg]\\
&=e^{-k_c vt}\Bigg[\frac{1}{2}\{\delta(x-vt)+\delta(x+vt)+I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\frac{k_c vt}{\sqrt{v^2t^2-x^2}}\}\theta(vt-|x|)f_k(-p,0)\\
&\quad-\frac{1}{2}\{\delta(x-vt)-\delta(x+vt)+I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\frac{k_c x}{\sqrt{v^2t^2-x^2}}\}\theta(vt-|x|)f_k(-p,0)\\
&\quad+\frac{1}{2}I_0(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\theta(vt-|x|)f_k(p,0)\Bigg]\\
&=e^{-k_c vt}f(x+vt,-p;0)\\
&+e^{-k_c vt}\int_{x-vt}^{x+vt}dx'\Bigg[I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2})\frac{vt-x+x'}{2\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2}}f(x',-p;0)\\
&\qquad\qquad+\frac{k_c}{2}I_0(k_c\sqrt{v^2t^2-(x-x')^2})f(x',p;0)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

(33),(35)において次の(36),(37),(38)を用いた。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{i}{(k^2-k_c^2)^{1/2}}\Big[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}-e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\Big]\\
&=I_0(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\theta(vt-|x|)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

(36)をtで偏微分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\left[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}+e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\right]$$
$$=\delta(x-vt)+\delta(x+vt)+I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\frac{k_cvt}{\sqrt{v^2t^2-x^2}}\theta(vt-|x|) \tag{37}$$

(36)をxで偏微分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{k}{(k^2-k_c^2)^{1/2}}\left[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}-e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\right]$$
$$=\delta(x-vt)-\delta(x+vt)+I_1(k_c\sqrt{v^2t^2-x^2})\frac{k_cx}{\sqrt{v^2t^2-x^2}}\theta(vt-|x|) \tag{38}$$

次の計算式を用いた。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{i}{(k^2-k_c^2)^{1/2}}\left[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}-e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ikx}\frac{i}{(k^2-k_c^2)^{1/2}}\left[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}-e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik|x|}\frac{i}{(k^2-k_c^2)^{1/2}}\left[e^{-ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}-e^{ivt(k^2-k_c^2)^{1/2}}\right] \tag{39}$$

ガウス平面の上半面を閉じることにより、次の式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik|x|}\frac{i}{(k^2-k_c^2)_+^{1/2}}e^{ivt(k^2-k_c^2)_+^{1/2}}=0, \qquad \text{—-branch} \tag{40}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik|x|}\frac{i}{(k^2-k_c^2)_+^{1/2}}e^{-ivt(k^2-k_c^2)_+^{1/2}}=0 \quad \text{for } |x|-vt>0 \qquad \text{+-branch} \tag{41}$$

ガウス平面の下半面を閉じることにより、次の式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{i}{(k^2-k_c^2)_-^{1/2}}e^{-ivt(k^2-k_c^2)_-^{1/2}}=0, \tag{42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{i}{(k^2-k_c^2)_-^{1/2}}e^{ivt(k^2-k_c^2)_-^{1/2}}=0 \quad \text{for } x<-vt \tag{43}$$

$\text{for } |x|-vt<0$においてガウス平面の下半分を閉じることにより、そしてカット$[-k_c,k_c]$のまわりの１つに縮小することにより次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{i}{(k^2 - k_c^2)_+^{1/2}} e^{-ivt(k^2-k_c^2)_+^{1/2}} \\
&= \int_{-k_c}^{k_c} \frac{dk}{2\pi} e^{ik|x|} \frac{1}{\sqrt{k_c^2 - k^2}} \left[e^{vt\sqrt{k_c^2-k^2}} + e^{-vt\sqrt{k_c^2-k^2}} \right] \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{ik_c|x|\cos\theta} \left[e^{k_c vt \sin\theta} + e^{-k_c vt\sin\theta} \right] \qquad (k = k\cos\theta) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{ik_c|x|\cos\theta} e^{k_c vt\sin\theta} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left[k_c \sqrt{v^2t^2 - x^2}\, \cos(\theta - \alpha) \right] \\
&= J_0(ik_c\sqrt{v^2t^2 - x^2}) \\
&= I_0(k_c\sqrt{v^2t^2 - x^2})
\end{aligned}
\tag{44}
$$

４章.電信方程式

電信方程式は波動方程式と拡散方程式から成る。

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}+\gamma\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{45}$$

波動方程式は

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{46}$$

で表され、その解は

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\{\psi(x-vt,0)+\psi(x+vt,0)\}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}dx'\left(\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial t}\right)_{t=0} \tag{47}$$

となる。

一方、拡散方程式は

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-D\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \tag{48}$$

で表され、その解は

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4Dt}\right]\psi(x',0) \tag{49}$$

となる。

粒子成分が波動方程式、拡散成分が拡散方程式に対応する。

電信方程式に $\psi(x,t)=e^{-ikt+ikx}$ を挿入するとボルツマン方程式の固有値方程式と同じ方程式が得られる。

$$z^2+i\gamma z-k^2v^2=0 \tag{50}$$

波動方程式の解は

$$\psi(x,t) = e^{-\gamma t/2} u(x,t)$$

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2}\{\psi(x+vt,0) + \psi(x-vt,0)\} \\ & + \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \psi(x',0) \frac{k_c vt}{2\sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}} I_1(k_c \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}) \\ & + \frac{\gamma}{4v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \psi(x',0) I_0(k_c \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}) \\ & + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \left(\frac{\partial \psi(x',t)}{\partial t} \right)_{t=0} I_0(k_c \sqrt{v^2t^2 - (x-x')^2}) \end{aligned} \tag{51}$$

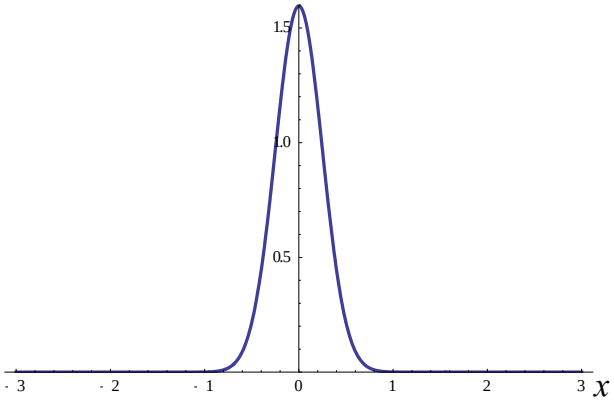
４章．ボルツマン方程式の初期値問題の解の数値計算

ボルツマン方程式の初期値問題(30),(31)に次の初期条件を与え、数値計算した。

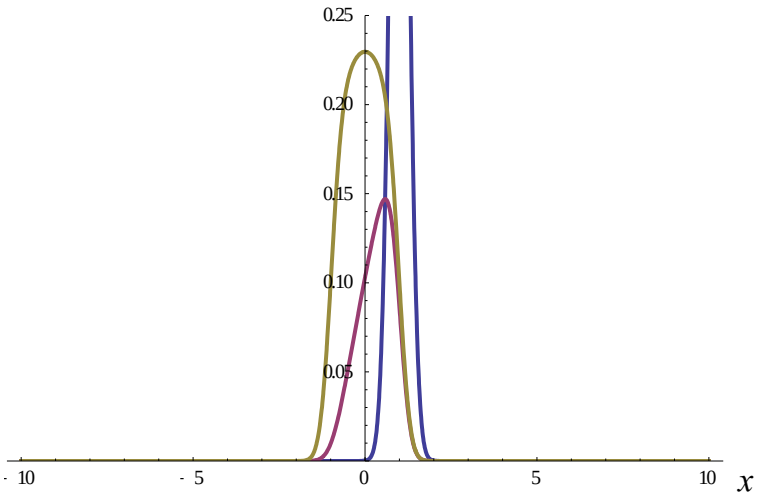
$$f(x,p;t=0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 0.25^2}}e^{-\frac{x^2}{2\times 0.25^2}},\ f(x,-p;t=0)=0 \tag{52}$$

$v=1,k_p=1$のときの透過波束の粒子成分（青）と拡散成分(赤)、反射波束（黄）をグラフに示した。

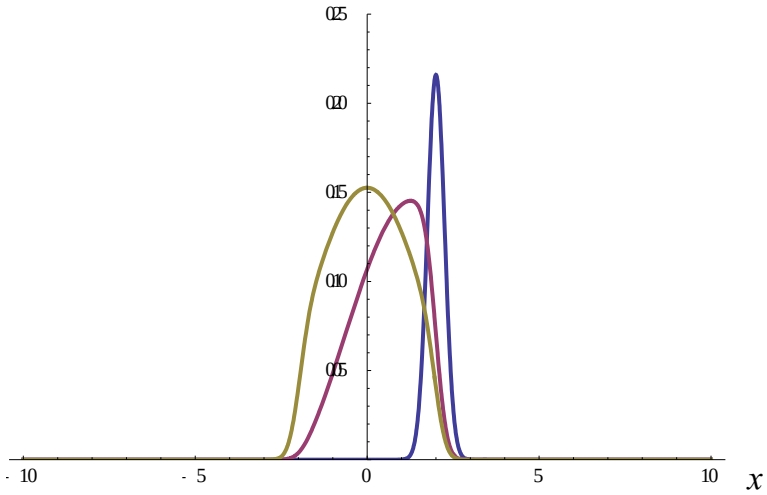
初期条件$t=0$　　$f(x,p;t)$



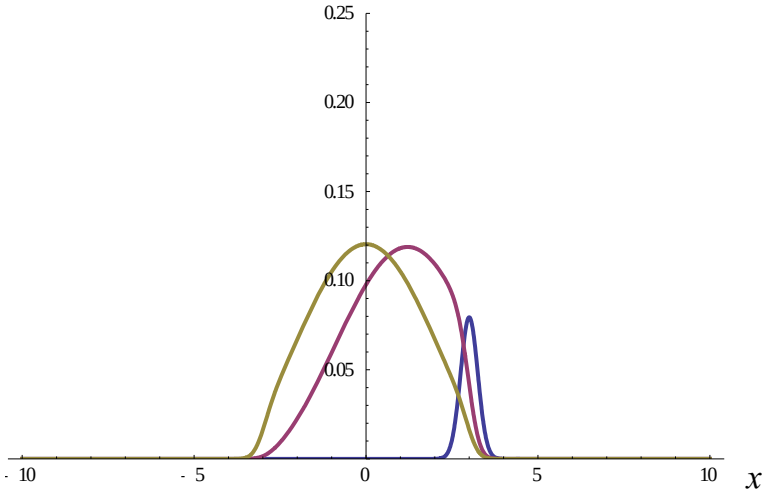
$t=1$　　$f(x,p;t)$, $f(x,-p;t)$



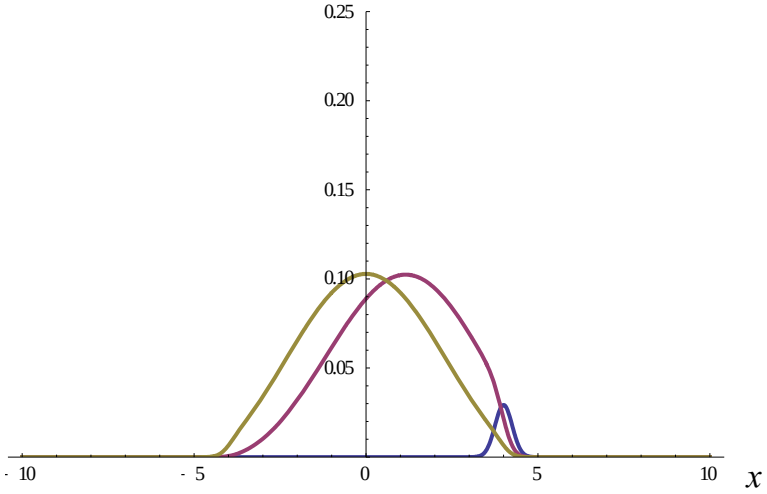
$t = 2$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



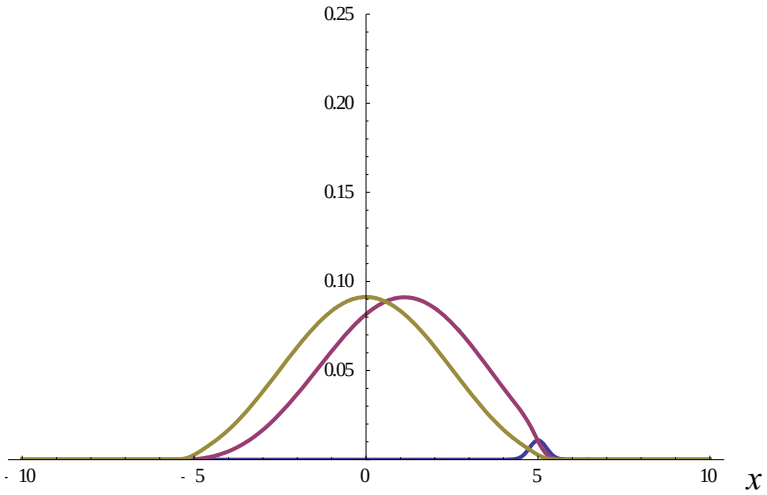
$t = 3$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



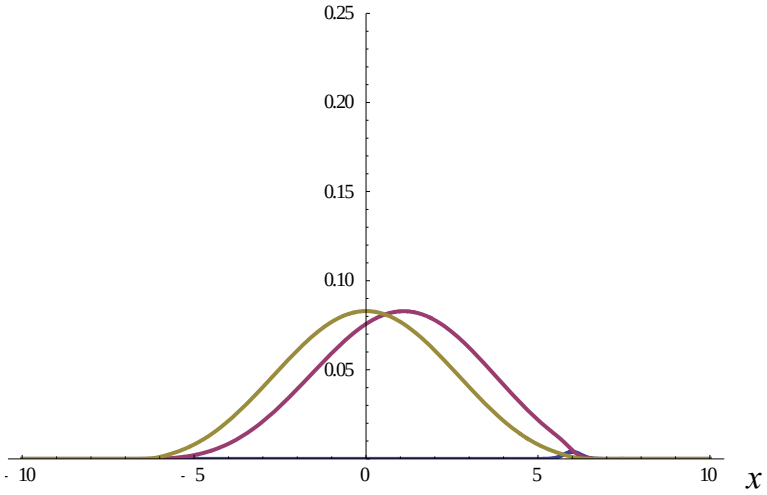
$t = 4$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



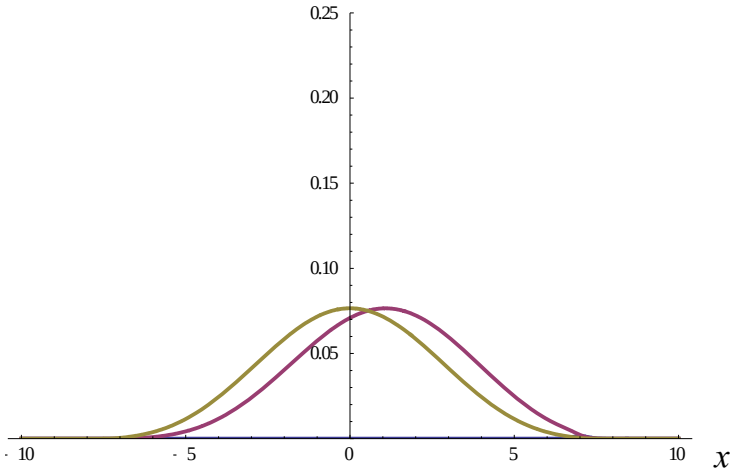
$t = 5$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



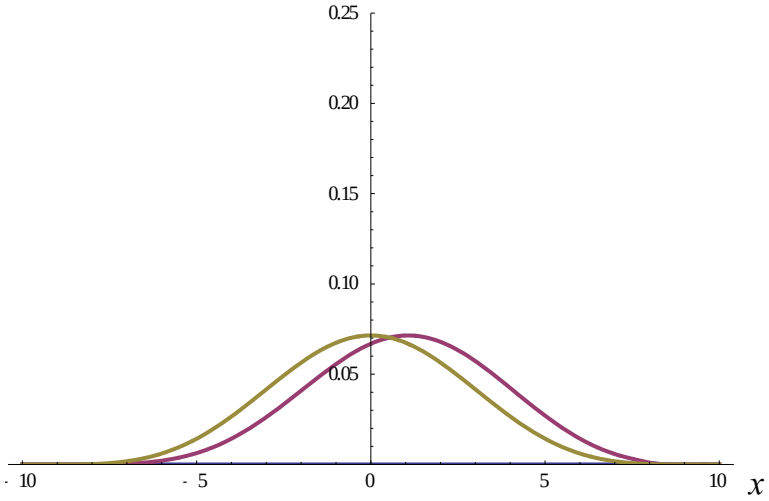
$t = 6$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



$t = 7$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



$t = 8$ $f(x, p; t)$, $f(x, -p; t)$



５章. 結論

粒子成分ははじめは拡散成分、反射波束に比べて大きいが時間が経つとに0に近づく。粒子成分の減衰率は拡散成分、反射波束に比べて大きい。拡散成分ははじめは右側が上に凸であるが、時間が経つと左右対称のガウス波束になる。拡散成分と反射波束ははじめは波束の形は違うが時間が経つと同じ形のガウス波束になる。拡散成分と反射波束はx軸方向には移動しない。

引用文献

Non-divergent representation of Non-Hermitian Operator near the Exceptional Point with Application to a Quantum Lorentz Gas :Kazunari Hashimoto,Kazuki Kanki,Hisao Hayakawa,and Tomio Petrosky(2013)

J.D.Stratton:Electromagnetic Theory 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論