

(問題 9)

a, b を整数とする $x^2 + ax + b = 0$ が整数解をもつとき、判別式 D が平方数であることを示せ。

(解答)

$$D = a^2 - 4b$$

2 つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -a$$

$$\alpha\beta = b$$

$$D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha - \beta)^2$$

(解法のテクニック)

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$$

a が奇数のとき方程式の解 x が整数解をもつから分母は 2 より分子 $-a \pm \sqrt{D}$ は偶数でなければならない。よって a が奇数より $\sqrt{D}$ は奇数でなければならない。(奇数 + 奇数 = 偶数)。ゆえに D は奇数を平方した数。

a が偶数のとき方程式が解 x が整数解をもつから分母は 2 より分子 $-a \pm \sqrt{D}$ は偶数でなければならない。 a が偶数より $\sqrt{D}$ は偶数でなければならない。(偶数 + 偶数 = 偶数)。ゆえに D は偶数を平方した数。