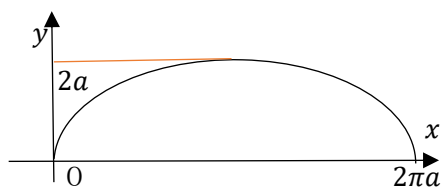


(問題 14) サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた面積 S を求めよ。

(解答)



$$S = \int_0^{2\pi a} y dx$$

$$= \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$