

2変数関数の極値を求める問題

$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$  ( $0 < x, y < \pi$ ) の極値を求めよ。

(解) まず停留点を求める。

$$f_x(x, y) = \cos x + \cos(x + y) = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$f_y(x, y) = \cos y + \cos(x + y) = 0 \text{ より}$$

$$\cos x = \cos y$$

$$x = y$$

これを①式に代入して

$$\cos x + \cos(2x) = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}, -1$$

$(x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  は停留点。

$$f_{xx}(x, y) = -\sin x - \sin(x + y) \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$f_{xy}(x, y) = -\sin(x + y) \quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{yy}(x, y) = -\sin y - \sin(x + y) \quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

ヘッシアンは

$$H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} > 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) < 0 \text{ より}$$

$f(x, y)$  は  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  で極大値  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  をとる。