

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ①$$

の形の微分方程式を解く。

$$\text{解の形として } u(x, y, z) = a \quad ②$$

x, y, z は独立変数と見なせるが、 $z=f(x, y)$ と見なすこともできる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & (\because \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} = 0) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad ③$$

③式を①に代入して

$$-P \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - Q \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ④$$

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R \quad ⑤$$

⑤式を変形して

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

特性方程式の2つの1次独立な解が $u(x, y, z) = a, v(x, y, z) = b$ とする。

ここで任意関数 $\varphi(u, v) = 0$,もしくは $u = g(v)$ が①式と⑤式を満たすとする

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\alpha z \Leftrightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\alpha z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow y = ax, \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\alpha z} \Rightarrow z = by^\alpha$$

$$\therefore \begin{cases} y = ax \Rightarrow \frac{y}{x} = a \\ z = by^\alpha \Rightarrow \frac{z}{y^\alpha} = b \end{cases}$$

$$\text{一般解は } f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y^\alpha}\right) = 0$$

$$\text{または } \frac{z}{y^\alpha} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$