

(問題 4)

(1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  について, 等式  $AB = BA$  がなりたつとき, 行列  $A$  の成分の間には

どのような関係があるか。

(2)  $a = \frac{3}{5}$  のとき  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を満たす行列  $A$  を求めよ。

(解答)

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b^2 = c^2 & \cdots \textcircled{1} \\ ac + bd = ab + cd & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①式より  $b = \pm c$

(i)  $b = c$  のとき②は成立。

$$\therefore b = c$$

(ii)  $b = -c$  のとき

$$ac + bd = a(-b) + bd = b(d - a)$$

$$ab + cd = ab + (-b)d = b(a - d)$$

$$b(d - a) = b(a - d)$$

$\therefore b$  は任意より  $b = -c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0, c \neq 0$  かつ  $a = d$  または

$b = -c = 0$  の場合は  $b = c = 0$  となり (i) に含まれる。

(答え)

$$b \neq 0, c \neq 0 \text{ かつ } a = d$$

$$\text{または } b = c$$

(2)

$$\begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b^2 = c^2 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

$$b = \pm \frac{4}{5}, c = \pm \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5}\left(\pm\frac{4}{5}\right)+\left(\pm\frac{4}{5}\right)d=0$$

$$b=\frac{4}{5},c=\frac{4}{5}のときd=-\frac{3}{5}$$

$$b=\frac{4}{5},c=-\frac{4}{5}のときd=\frac{3}{5}$$

$$b=-\frac{4}{5},c=\frac{4}{5}のときd=\frac{3}{5}$$

$$b=-\frac{4}{5},c=-\frac{4}{5}のときd=-\frac{3}{5}$$

$$(\text{答え})A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\-4&3\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}$$