大学数学公式集

・数列の極限：$a > 1, k \in \boldsymbol{N}$とする。$n \to \infty$のとき無限大にいくスピードは

$\log n \ll n^k \ll a^n \ll n!$の順に大きくなる。

・「連続性の公理」：上に有界な単調増加数列は収束する。

・三角不等式：$|a+b| \leq |a| + |b|$

・２項係数: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$

・２項定理: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

・自然対数の底：$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots$

・ハイパボリック三角関数：$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

加法定理$\begin{cases} \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{cases}$

・$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

・$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

・$(e^x)^{(n)} = e^x$

$((x+a)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(x+a)^{\alpha-n\alpha}$

$(\mathrm{Log}(x+a))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+a)^n}$

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$

$\left(f(ax+b)\right)^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

・ ライプニッツの公式：$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

・マクローリン展開

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n$$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\mathrm{Sin}\,x \;= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

・ヤコビアン：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$

・$f\,(x,y)$　が(a,b)で極値をとる。⇒(a,b)は停留点

・ヘッシアン：$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

・２変数関数の極値を求める方法。

ステップ１：停留点(a,b)を求める。

ステップ２：各停留点でヘッシアンを計算する。

ステップ３：$H_f(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b)$で極値をとる。

$f_{xx}(a,b) > 0$⇒極小

$f_{xx}(a,b) < 0$⇒極大

$H_f(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)$で極値を取らない。

$H_f(a,b) = 0$⇒他の方法でがんばる。

・外積（ベクトル積）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\boldsymbol{k}$

・$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

・ストークスの定理

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot dS$$