（問題６９）

$$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0 & na\\ 0 & 0\end{pmatrix}\left(a\neq 0,\ n\text{は自然数とする}\right)$$

$X^2=N$を満たす行列Xは存在しないことを証明せよ。

（解答）

$$X^2=\begin{pmatrix}x^2+yz & y(x+w)\\ z(x+w) & yz+w^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x^2+yz=0\cdots①\\ y(x+w)=na\neq 0\cdots②\\ z(x+w)=0\cdots③\\ yz+w^2=0\cdots④\end{cases}$$

②式より$y\neq 0$,

$$x\neq -w\cdots⑤$$

これを③式に代入して$z=0$
これを④式に代入して$w=0$
⑤式より

（解法のテクニック）
$x\neq -w$　より
$x\neq 0$

①式の左辺において

$x\neq 0,\ z=0$より

$x^2+yz=x^2\neq 0$
これは①式の等式を満たさない。

$\therefore X^2=N$を満たす行列Xは存在しない。