

数学Ⅱ（図形、ベクトル） 解法のテクニック

1. 3点 Q, A, R が一直線上にあることの証明

(解法のテクニック)

[解法 1] QA の延長線上のある点を R' とし, R' と R が一致することを証明する。

[解法 2] $\angle QAR = 180^\circ$ を示す。

2. $f(x, y) + kg(x, y) = 0$ は $f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = 0$ の共有点を通る。

ただし, $g(x, y) = 0$ を表す k はない。

3. 三角形 ABC の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

($s = \frac{a+b+c}{2}$, r, R はそれぞれ三角形の内接円、外接円の半径)

4. 図形の問題 → 補助線をひく。

(解法のテクニック)

[解法 1] ある点を通る, ある直線に平行な線をひく。

[解法 2] ある点からある直線に垂線を下ろす。

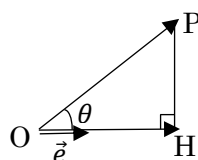
5. 点 (x_1, y_1) が $f(x, y) = 1$ 上にあることの証明

→ $1 - f(x_1, y_1) \neq 0$ を示す。

6. 点 P が円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上にある。→ $|\vec{OP}| = a$

7. $\vec{OP}$ と $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$) のなす角を θ とし, 点 P から $\vec{e}$ の延長上に垂線 PH を下ろす。

$$\vec{OH} = (|\vec{OP}| \cos \theta) \vec{e} = (\vec{OP} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$



(注意) $(\vec{OP} \cdot \vec{e})$ はスカラー量, ベクトル量ではない。

10. 空間のベクトル表示 → 平面上のベクトル表示に変形。

(解法のテクニック)

$\vec{AH} = s\vec{AO} + t\vec{AB} + u\vec{AC}$ と表示するよりも

$\vec{OH} = s\vec{OB} + t\vec{OC}$ と表示する方が計算が楽!

(s, t, u の 3 変数 → s, t の 2 変数)

11.シュエワルツの不等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

[証明]

$\vec{a} = (a, b), \vec{x} = (x, y)$ とおくと

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos \theta$$

2 乗して

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{x}|^2 \cos^2 \theta$$

$0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ より

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{x}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

12.点と平面の距離

点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 l は

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

[証明]

距離を l とすると

$$(x_0, y_0, z_0) + l \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \left(x_0 + \frac{la}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y_0 + \frac{lb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z_0 + \frac{lc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

は平面上の点だから

$$a \left(x_0 + \frac{la}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + b \left(y_0 + \frac{lb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + c \left(z_0 + \frac{lc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + d = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d + l \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$l = \frac{-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$l > 0$ より

$$\therefore l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

13.ヘッセの標準形

平面 C: $lx + my + nz = p$ ($p \geq 0, l^2 + m^2 + n^2 = 1$)

原点 O から平面 C に下した垂線の足を H とすると

$$OH = p, \overrightarrow{OH} = p(l, m, n)$$

[証明]

$$\begin{aligned}lx + my + nz - p &= 0 \\ \Leftrightarrow lx + my + nz - (l^2 + m^2 + n^2)p &= 0 \\ \Leftrightarrow l(x - lp) + m(y - mp) + n(z - np) &= 0\end{aligned}$$

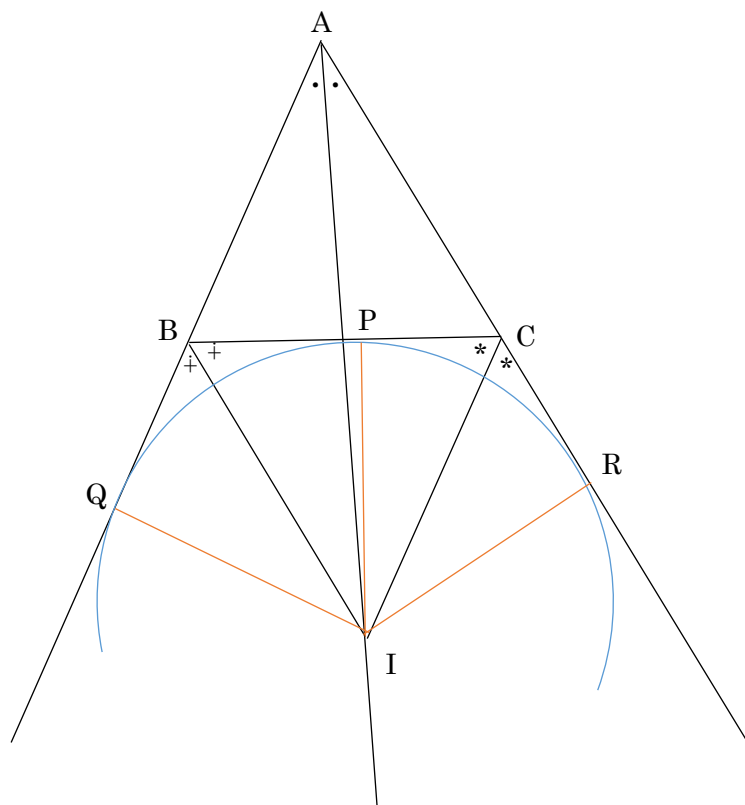
よって平面 C は点 $H(lp, mp, np)$ を通り法線ベクトルは $\vec{n} = (l, m, n)$ となる。

$$OH = |\vec{OH}| = \sqrt{p^2(l^2 + m^2 + n^2)} = p$$

15. 三角形の傍心

三角形の 1 つの頂点における内角の 2 等分線と

他の 2 つの頂点における外角の二等分線は一致する。



[証明] $\angle B$ 、 $\angle C$ の 2 等分線の交点を I とする。

点 I から BC および AB, AC の延長上に垂線 IP, IQ, IR を下す。

$$\triangle IBP \equiv \triangle IBQ$$

$$\triangle ICP \equiv \triangle ICR \text{ より}$$

$$IQ = IP = IR$$

傍接円が存在する。

$$\text{また、} \triangle IAQ \equiv \triangle IAR \therefore \angle IAQ = \angle IAR$$