

(問題 60)

次の有理数列について以下の問いに答えよ。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$$

- (1) 数列(*)の第 $\frac{37}{50}$ は第何項になるか。
- (2) 数列(*)の第 1000 項の数を求めよ。
- (3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

(解答)

(1)

(解法のテクニック)

指針：群数列はまず、具体的に数多く書き出し、「規則性」を見抜く。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \dots$$

分母が $n+1$ の数列のかたまりを第 n 群にとる。

$\frac{37}{50}$ は第 49 群の第 37 項目

$$\sum_{k=1}^{48} k + 37 = \frac{48 \cdot 49}{2} + 37 = \mathbf{1213}$$

(2)

第 44 群の最後の項は

$$\sum_{k=1}^{43} k + 44 = \frac{43 \cdot 44}{2} + 44 = 990 \text{ より}$$

第 990 項目

第 1000 項は第 45 群の 10 項目

$$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{46}}$$

(3)

(解法のテクニック)

第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\dots+n) = \frac{n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{44} \frac{k}{2} + \frac{1+2+\dots+10}{46}$$

$$= \frac{44 \cdot 45}{2 \cdot 2} + \frac{55}{46} = \mathbf{495} + \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{46}}$$