

微小ダイポール・アンテナ

この問題は線状アンテナや問題の基礎となる微小ダイポール・アンテナに関するものである。図のように波長 λ より

短い長さ l のアンテナに一様な電流 $I = I_0 e^{j\omega t}$ として、以下の問いに答えよ。

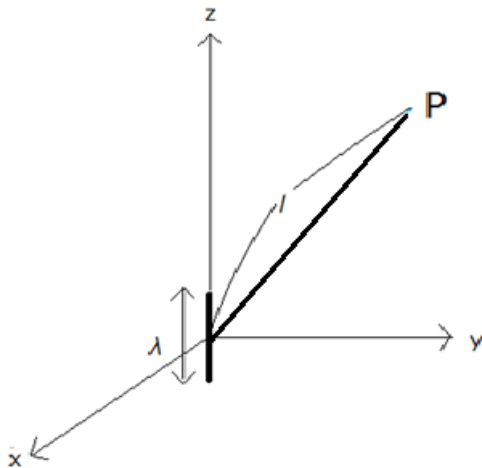
- (1) まず観測点 $P(r, \varphi, \theta)$ におけるベクトルポテンシャルを求め、
次に、点Pでの磁界 H を求めよ。
- (2) 上で求めた磁界 H から、遠方($r \gg \lambda$)での放射磁界 E, H を求めよ。
時間に対して、正弦的に変化する電流源 $J(r')$
が作るベクトルポテンシャルは次式

$$A = \int_{V'} \frac{\mu J(r') \exp[-jk|r - r'|]}{4\pi|r - r'|} dV$$

で与えられる。

次のベクトル公式を利用せよ。

$$\text{rot} A = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r \sin \theta \vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$



図

- (1) 電流 : $I = I_0 e^{j\omega t}$
が与式の $j\omega V$ に相当するので

$$k = \frac{\omega}{c}$$

よりベクトルポテンシャルは

$$\begin{cases} A_x = A_y = 0 \\ A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \end{cases}$$

変換公式

$$A_r = A_z \cos \theta, A_\theta = -A_z \sin \theta, A_\phi = 0$$

$$\epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\text{div} A$$

を用いて、スカラーポテンシャル Φ を求めるために

$$\text{div} A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_z \cos \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \sin^2 \theta)$$

を計算する。

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &= \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \right) \\ &= \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\mu I_0 l}{4\pi} e^{j\omega t} \frac{\partial}{\partial r} (r e^{-jkr}) \\ &= \frac{\mu I_0 l}{4\pi r^2} e^{j\omega t} (e^{-jkr} - jkr e^{-jkr}) \cos \theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu I_0 l}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - kr)} (1 - jkr) \cos \theta$$

$$\text{第 2 項} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin^2 \theta \right)$$

$$\Phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{2\mu I_0 l}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta$$

$$\therefore -\text{div} A = \frac{\mu I_0 l}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - kr)} \{-(1 - jkr) \cos \theta + 2 \cos \theta\}$$

$$= \frac{\mu I_0 l}{4\pi r^2} e^{j(\omega t - kr)} (1 + jkr) \cos \theta$$

$$= \frac{\mu I_0 l}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right\} \cos \theta$$

$$\Phi = \int -\frac{\text{div} A}{\epsilon \mu} dt$$

$$= \int \frac{I_0 l}{4\pi \epsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right\} \cos \theta dt$$

$$= \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon} \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t - kr)} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right\} \cos \theta$$

$$E = -\text{grad}\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \text{rot}A$$

より

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{I_0 l \cos \theta}{4\pi\epsilon j\omega} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) (-jke^{j(\omega t - kr)} \cos \theta) + \left(-\frac{1}{r^3} - \frac{jk}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta$$

$$= \frac{I_0 l \cos \theta}{4\pi\epsilon j\omega} \left(\frac{k^2}{r} - \frac{2}{r^3} - \frac{2jk}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_z \cos \theta)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \cos \theta \right)$$

$$= j\omega \frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

を用いると $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t}$

$$= -\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon j\omega} \left(\frac{k^2}{r} - \frac{2}{r^3} - \frac{2jk}{r^2} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta$$

$$= \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon j\omega} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta$$

また、 $\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{I_0 l}{4\pi\epsilon \mu \omega} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta$

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (A_z \sin \theta)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta \right)$$

$$= -\frac{I_0 l j^2 \omega^2}{4\pi j \omega \epsilon} e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta$$

$$\therefore E_\theta = \frac{I_0 l}{4\pi j \omega \epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta$$

明らかに、 $E_\phi = 0$, $H_r = 0$, $H_\theta = 0$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r A_z \sin \theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_z \cos \theta) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta \right) + \frac{1}{r} \sin \theta \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \right) \\ &= \frac{\sin \theta}{r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \right) + \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{j(\omega t - kr)}}{r} \right) \right\} \\ &= \frac{\mu I_0 l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta \end{aligned}$$

$$B = \mu H \text{ より}$$

$$H_\phi = \frac{I_0 l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta$$

(2) $r \gg \lambda$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r \cong 0 \\ E_\theta = -\frac{I_0 l k^2}{4\pi \epsilon \mu j \omega} e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta \\ E_\phi = 0 \\ H_r = 0, H_\theta = 0 \\ H_\phi = \frac{I_0 l j k}{4\pi \epsilon \mu j \omega} e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta \end{array} \right.$$