

システム制御理論入門 演習問題[5-1]

次の図で示したシーソーシステムについて、極を $-4 \pm j2, -5 \pm j5$ とするレギュレータを構成せよ。

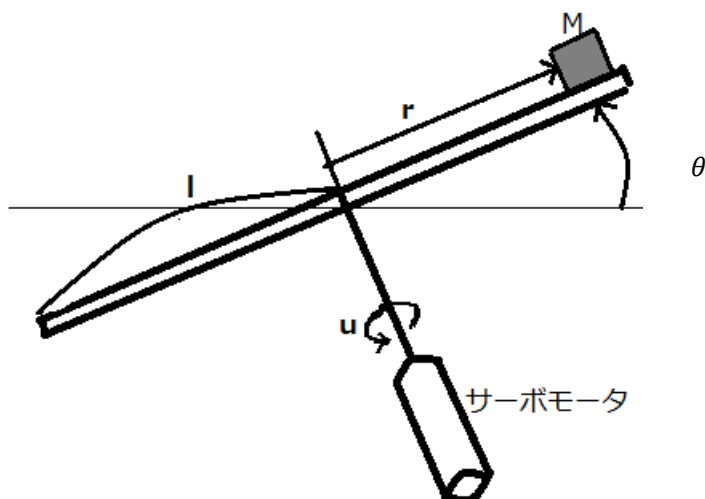


図 シーソーシステム

シーソーとマス、およびシーソーの回転軸の摩擦係数をそれぞれ D_r, D_θ とおけば

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & -D_r/M & 0 \\ -Mg/J & 0 & 0 & -D_\theta/J \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} u$$

簡単のため $D_r = D_\theta = 0, M = J = 1$ とおくと

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ステップ1

$$|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1$$

と可制御変換行列を求め次式の可制御正準形式への変換行列をつくる。

$$T = U_c W = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & & a_n & 1 \\ a_4 & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_n & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^2b &= A(Ab) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \\
A^3b &= A(A^2b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\therefore [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$|sI - A|$ を MAXIMA により求めると

$$|sI - A| = s^4 - g^2 = s^n + a_n s^{n-1} + \dots a_2 s + a_1$$

$$a_4 = a_3 = a_2 = 0, a_1 = -g^2$$

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ステップ 2

与えられた極 μ_i と

$$\begin{aligned}
(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) &= s^n + d_n s^{n-1} + \dots d_2 s + d_1 \\
(s + 4 + j2)(s + 4 - j2)(s + 5 + j5)(s + 5 - j5) \\
&= s^4 + 18s^3 + 150s^2 + 600s + 1000 \\
d_4 &= 18, d_3 = 150, d_2 = 600, d_1 = 1000
\end{aligned}$$

ステップ 3

$$\begin{aligned}
f &= (d_1 - a_1, d_2 - a_2, \dots, d_4 - a_4) T^{-1} = (1000 + g^2, 600, 150, 18) \begin{bmatrix} -\frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[-\frac{1000}{g} - g, 150, -\frac{600}{g}, 18 \right]
\end{aligned}$$