

常微分方程式

§ 1 . 1 階常微分方程式

① 変数分離形

② 同次系

③ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$

④ 非同次系

⑤ 完全微分系

⑥ 完全微分系 積分因子を用いる方法

⑦ $F(x, y') = 0$

⑧ $F(y, y') = 0$

⑨ クレーローの微分方程式

⑩ ラグランジュの微分方程式

§ 2 . 2 階定数係数線形微分方程式

§ 3 . 2 階変数係数線形微分方程式

§ 1 . 1 階常微分方程式

① 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

(例題) $\frac{dy}{dx} = 2xy$

(解)

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\log y = x^2 + C$$

C は積分定数

$$y = e^{x^2+C}$$

$e^C = C'$ とおいて

$$\therefore y = C'e^{x^2}$$

② 同次系

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおく。}$$

$$y = ux$$

両辺を x で微分して

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x = f(u)$$

$$f(u) - u = \frac{du}{dx}x$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

(例題) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$

(解)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおく。}$$

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} \quad x = u - 1$$

$$\int du = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$u = -\log x + C$$

$$\frac{y}{x} = -\log x + C$$

$$(答え) y = -x \log x + Cx$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$$

$$(i) \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0 \text{ のとき}$$

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$$

この解を $x = \xi, y = \eta$

$$\begin{cases} x = X + \xi \\ y = Y + \eta \end{cases}$$

とすると

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{aX+bY}{pX+qY}\right)$$

$$= F\left(\frac{a+b\left(\frac{Y}{X}\right)}{p+q\left(\frac{Y}{X}\right)}\right) \quad (\text{同次形})$$

$$(例題) \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+1}{x+y-2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
x &= X + \frac{1}{3} \\
y &= Y + \frac{5}{3} \\
\frac{dY}{dX} &= \frac{2X - Y}{X + Y} \\
\frac{dY}{dX} &= \frac{2 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}} \\
\frac{Y}{X} &= u \\
Y &= uX \\
\frac{dY}{dX} &= u + \frac{du}{dX}X \\
\frac{2 - u}{1 + u} &= u + \frac{du}{dX}X
\end{aligned}$$

整理して

$$\begin{aligned}
-2 \frac{dX}{X} &= \frac{2u + 2}{u^2 + 2u - 2} du \\
-2 \log|X| &= \log|u^2 + 2u - 2| + \log e^{C_1} \\
e^{C_1} &= C_2 \text{とおくと}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^2} &= C_2(u^2 + 2u - 2) \\
\frac{1}{X^2} &= C_2 \left(\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2 \frac{Y}{X} - 2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= (Y^2 + 2XY - 2X^2) \\
C_3 &= \left(\left(\frac{5}{3} - y\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{3} - x\right) \left(\frac{5}{3} - y\right) - 2 \left(\frac{1}{3} - x\right)^2 \right) \\
(\text{答え}) \quad C_3 &= ((5 - 3y)^2 + 2(1 - 3x)(5 - 3y) - 2(1 - 3x)^2)
\end{aligned}$$

(ii) $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
aq - bp &= 0 \\
\frac{a}{p} &= \frac{b}{q} = k
\end{aligned}$$

k は定数

$$\begin{aligned}a &= pk \\b &= qk \\\frac{dy}{dx} &= F\left(\frac{pkx + qky + c}{px + qy + r}\right) \\&= F\left(\frac{k(px + qy) + c}{px + qy + r}\right)\end{aligned}$$

ここで $z = px + qy$ とおき両辺を z で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= p + q \frac{dy}{dx} \\&= p + q \times F\left(\frac{kz + c}{z + r}\right)\end{aligned}$$

これは(変数分離形)

$$(例題) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y-3}{3x-3y-1}$$

$$= \frac{x-y-3}{3(x-y)-1}$$

$$z = x - y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$= 1 - \frac{z-3}{3z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z+2}{3z-1}$$

$$\int \frac{3}{2} - \frac{2}{z+1} dz \int dx$$

$$\frac{3}{2}z - 2 \log|z+1| = x + C_1$$

$$\frac{3}{2}(x-y) - 2 \log(x-y+1) = x + C_1$$

$$4 \log(x-y+1) = (x-3y) + C_2$$

$$\log(x-y+1) = \frac{1}{4}(x-3y) + C_3$$

$$(答え) x-y+1 = C_4 e^{\frac{1}{4}(x-3y)}$$

④ 非同次系

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$Q(x) = 0$ とおいたときの微分方程式の解(一般解)ともと

の方程式の解（特解）の和で求まる。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \text{ を解く。}$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -P(x)dx$$

$$\log y = \int -P(x)dx + C$$

$$\begin{aligned} x^y &= e^{\int -P(x)dx + C} \\ y &= C'e^{\int -P(x)dx} \end{aligned}$$

定数変化法

$$y = C(x)e^{\int -P(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx} + C(x)e^{\int -P(x)dx} \frac{d}{dx}(e^{\int -P(x)dx})$$

$$= \frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx} + P(x)C(x)e^{\int -P(x)dx}$$

$$= \frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx} - P(x)y = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx} - P(x)y + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + D$$

$$(答) y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + D \right) e^{\int -P(x)dx}$$

$$(例題) \frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ を解くと}$$

$$\log y = -x + C_1$$

$$y = C_2 e^x$$

定数変化法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-x} + C(x) \cdot -e^{-x}$$

$$= \frac{dC(x)}{dx} e^{-x} - C(x)$$

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x^2 e^{-x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-x} = x^2 e^{-x}$$

$$C(x) = \int x^2 e^{-x} dx$$

$$C(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + D$$

$$(答え)y = ((x^2 - 2x + 2)e^x + D)e^{-x}$$

④完全微分系

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全系であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である。

次の公式がある。

$$\int P(x, y)dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx - Q(x, y) \right) dy = C$$

(例題) $(y^2 + e^x \sin y)dx + (2xy + e^x \cos y)dy = 0$

(解)

$$P = y^2 + e^x \sin y, Q = 2xy + e^x \cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + e^x \cos y$$

公式を利用して

$$\begin{aligned} & \int (y^2 + e^x \sin y) dx + \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\int (y^2 + e^x \sin y) dx - (2xy + e^x \cos y) \right] \right) dy = C \\ & xy^2 + e^x \sin y + \int \left(\frac{\partial}{\partial y} [xy^2 + e^x \sin y] - 2xy - e^x \cos y \right) dy = C \\ & xy^2 + e^x \sin y + \int dy 2xy + \cos y - 2xy - e^x \cos y = C \\ & \therefore xy^2 + e^x \sin y = C' \end{aligned}$$

⑤ $Pdx + Qdy$ が完全微分系でない場合

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ であっても積分因子 $\lambda(x, y)$ をかけると

完全微分系になるものがある。

(例題) $(3xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + x)dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy + 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy + 1 \text{ 完全微分系でない。}$$

積分因子 x をかけると

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = 6x^2y + 2x$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial x} = 6x^2y + 2x$$

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial x} \text{ 完全微分系}$$

(例題) $ydx - xdy = 0$

積分因子 $x^m y^n$ をかけると完全微分系になるとすると

$$x^m y^{n+1} dx - x^{m+1} y^n dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (n+1)x^m y^n$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(m+1)x^m y^n$$

$$n+1 = -m-1$$

$$n = m = -1 \quad \lambda(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$n = 0, m = -2 \quad \lambda(x, y) = \frac{1}{x^2}$$

$$n = -2, m = 0 \quad \lambda(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

⑥ $F(x, y') = 0 \Rightarrow F(x, p) = 0$

$y' = \frac{dy}{dx} = p$ とおく。

$$F(x, p) = 0$$

を x について解く。

$$x = \varphi(p) \quad \text{①}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d\varphi}{dp}$$

$$y = \int dy = \int pdx$$

$$= \int p \frac{d\varphi}{dp} dp \quad \text{②}$$

①、②から p を消去 $\rightarrow (x, y)$

(例題) $x = e^p$

$$\frac{dx}{dp} = e^p$$

$$y = \int p \frac{dx}{dp} dp$$

$$= \int p e^p dp$$

$$= pe^p - e^p + C$$

$$\therefore y = x \log x - x + C$$

(例題) $x = \cos p$

$$\frac{dx}{dp} = -\sin p$$

$$y = \int p \frac{dx}{dp} dp$$

$$= \int p (-\sin p) dp$$

$$\therefore y = p \cos p - \sin p + C, (p = \cos^{-1} x)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} F(y, y') &= 0 \\ y' &= \frac{dy}{dx} = p \end{aligned}$$

$$F(y, p) = 0$$

$$y = \psi(p) \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{d\psi}{dp}$$

$$x = \int \frac{1}{p} dy$$

$$= \int \frac{1}{p} \frac{d\psi}{dp} dp \quad \textcircled{2}$$

①、②式より p を消去 $\rightarrow (x, y)$

(例題) $y - \sqrt{y'} = 0$

$$y^2 = p, y = \sqrt{p}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$x = \int dx = \int \frac{dx}{dy} dy$$

$$= \int \frac{1}{p} \frac{1}{2\sqrt{p}} dp$$

$$\frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}} dp$$

$$= \int = -p^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\therefore x = -\frac{1}{y} + C$$

⑧ クレーローの方程式
 $y = px + f(p)$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= p + \frac{dp}{dx}x + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} \\ \left(x + \frac{df}{dp}\right)\frac{dp}{dx} &= 0 \\ x + \frac{df}{dp} &= 0\end{aligned}$$

$$\text{または } \frac{dp}{dx} = 0$$

(例題) $y = px - p - p^2$

$$\frac{dp}{dx}(x + 1 - 2p) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ または } x + 1 - 2p = 0$$

$$\begin{aligned}p &= C, p = \frac{1}{2}(x + 1) \text{ を与式に代入して} \\ &\therefore cx + c - c^2 \text{ (一般解)}, y = \frac{1}{4}(x + 1)^2\end{aligned}$$

(例題) $y = px - p^2$

$$\frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0$$

$$\therefore y = Cx - C^2 \text{ (一般解)}, y = \frac{1}{4}x^2 \text{ (特殊解)}$$

⑨ ラグランジュの微分方程式

$$y = xf(p) + g(p)$$

両辺を x で微分すると

$$p = \frac{dy}{dx} = f(p) + x \frac{df}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{dg}{dp} \frac{dp}{dx}$$

$$f(p) - p = -\left(x \frac{df}{dp} + \frac{dg}{dp}\right) \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp}(f(p) - p) = -x \frac{df}{dp} - \frac{dg}{dp}$$

$$\frac{dx}{dp}(f(p) - p) + x \frac{df}{dp} = -\frac{dg}{dp}$$

$$f(p) - p \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dp} + \frac{x}{f(p) - p} \frac{df}{dp} &= -\frac{1}{f(p) - p} \frac{dg}{dp} \\ \frac{dx}{dp} + \frac{1}{f(p) - p} \frac{df}{dp} x &= -\frac{1}{f(p) - p} \frac{dg}{dp} \\ \frac{dx}{dp} + F(p)x &= G(p) \frac{dg}{dp}\end{aligned}$$

(例題) $y = p^2x + p^2$

$$p(1-p) \frac{dx}{dp} = 2p(x+1) \quad (p \text{ と } x \text{ の関数})$$

$p \neq 0, p - 1 \neq 0$ のとき

$$(1-p) \frac{dx}{dp} = 2(x+1)$$

$$\frac{dx}{x+1} = -2 \frac{dp}{p-1}$$

$$\log(x+1) = \log C_2(p-1)^{-2}$$

$$(x+1) = C_2(p-1)^{-2}$$

$$p = 1 + C_3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = (x+1) \left(1 + C_3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \quad (\text{一般解})$$

§ 2 . 2 階定数係数微分方程式

$$y'' + ay' + b = 0$$

$$\begin{aligned}y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} &= 0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda x} &= 0\end{aligned}$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を特性方程式という。

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{を特性根という。}$$

$$(i) \lambda = \lambda_1, \lambda_2$$

一般解は $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(ii) $\lambda = \lambda_1$ (重解)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 + (b -) = 0$$

$$\lambda = -\frac{a}{2} = \alpha$$

$$b = \frac{a^2}{4} = \alpha^2$$

$y = Ce^{\alpha x}$ は一般解のひとつ。

定数変化法より $y = C(x)e^{\alpha x}$

$$y' = C' e^{\alpha x} + C\alpha e^{\alpha x}$$

$$y'' = C'' e^{\alpha x} + C'\alpha e^{\alpha x} + C'\alpha e^{\alpha x} + C\alpha^2 e^{\alpha x}$$

これらを $y'' + ay' + b = 0$ に代入して整理すると、

$$(\alpha^2 + a\alpha + b)Ce^{\alpha x} + (C'' + 2\alpha C' + aC')e^{\alpha x} = 0$$

第1項の係数は 0 より

$$C'' + 2\alpha C' + aC' = 0$$

$$C'' + 2\alpha C' - 2\alpha C' = 0$$

$$C''(x) = 0$$

$$\therefore C = D_1 x + D_2$$

(答え) $y(x) = (D_1 x + D_2)e^{\alpha x}$

(iii) 複素数 $\lambda = \alpha \pm i\beta$

オイラーの公式を用いて (i) $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$

の場合の一般解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ を変形して

(答え) $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

(例題) $y'' + 2y' - 8y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = -4, 2$$

(答え) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$

(例題) $y'' + 2y' + 1 = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -1$$

(答え) $y = (C_1 x + C_2)e^{-x}$

(例題) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

$$(答え) y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

$$(発展例題) 初期値問題 \quad y'' - 3y' - 4y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$$

まず $y'' - 3y' - 4y = 0$ を解く。

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} \quad ①$$

$$\text{微分して } y'(x) = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x} \quad ②$$

① に $x = 0$ を代入して

$$y(0) = 2$$

② に $x = 0$ を代入して

$$y'(0) = 4C_1 - C_2 = 3$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1$$

$$\therefore y(x) = e^{4x} + e^{-x}$$

$$(発展例題) 境界値問題 y'' - 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = e^2$$

まず $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解くと

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

この式に $x = 0$ を代入して

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad ③$$

$x = 1$ を代入して

$$y(x) = C_1 e^3 + C_2 e^2 = e^2 \quad ④$$

③ より $-C_2$ これを ④ に代入して

$$-C_2 e^3 + C_2 e^2 = e^2$$

$$C_2 e^2 (1 - e) = e^2$$

$$C_2 = \frac{1}{1 - e}$$

$$C_1 = -\frac{1}{1 - e}$$

$$y(x) = -\frac{1}{1 - e} e^{3x} + \frac{1}{1 - e} e^{2x}$$

(参考) このように、初期条件や境界条件が与えられれば、任意定数がある値に定まる。

§ 3. 2 階変数係数線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \text{ 齊次方程式}$$

一般解は 2 つの線形独立な連続関数を用いて

$$C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) \text{ と表せる。}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \text{ の解は}$$

$$y(x) = +C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$$

$y_0(x)$ は特殊解、 $C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$ は齊次方程式の一般解。

$\{\varphi(x), \psi(x)\}$ は基本解系と呼ばれる。 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$

$\varphi(x)$ と $\psi(x)$ が 1 次独立である条件

$$C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) \text{ を } x \text{ で微分}$$

$$C_1\varphi'(x) + C_2\psi'(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = W(x) \text{ (ワニスキンアン)}$$

$W(x) \neq 0$ ならば 1 次独立

特殊解 $y_0(x)$ を求める。定数変化法

$\{\varphi(x), \psi(x)\}$ が基本解系であるとき

$$y_0(x) = y(x) = C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) \text{ として}$$

$$\text{公式 } y_0(x) = - \int \frac{\psi(x) R(x)}{W(x)} dx \varphi(x) + \int \frac{\varphi(x) R(x)}{W(x)} dx \psi(x)$$

ゆえに $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解は

$$y(x) = A_1\varphi(x) + A_2\psi(x) - \int \frac{\psi(x) R(x)}{W(x)} dx \varphi(x) + \int \frac{\varphi(x) R(x)}{W(x)} dx \psi(x)$$

(例題) $\varphi(x) = e^x$ が微分方程式 $(1 - 2x)y'' + 2y' - (3 - 2x)y = 0$

の解であるときこの微分方程式の解を求めよ。

$$y = u(x)\varphi(x) = u(x)e^x$$

$$y' = u'(x)e^x + ue(x) = e^x(u' + u)$$

$$y'' = e^x(u' + u) + e^x(u'' + u')$$

$$= e^x(u'' + 2u' + u)$$

元の式に代入

$$(1 - 2x)e^x(u'' + 2u' + u) - 2e^x(u'' + u) - (3 - 2x)ue^x = 0$$

$$(2x - 1)u'' + 4(x - 1)u' = 0$$

$$u' = z \text{ とおくと}$$

$$z' = -\frac{4(x-1)}{2x-1}z$$

$$\int \frac{dz}{z} = - \int \frac{4(x-1)}{2x-1} dx +$$

$$= - \int 2 - \frac{2}{2x-1} dx$$

$$= \int -2 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} dx$$

$$\log z = -2x + \log\left(x - \frac{1}{2}\right) + C_1$$

$$= \log e^{-2x} + \log\left(x - \frac{1}{2}\right) + \log e^{C_1}$$

$$z = \log C_2 e^{-2x} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$u = \int zdz$$

$$= -\frac{C_2}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}C_2e^{-2x} + D_1$$

$$= C_3 xe^{-2x} + D_1$$

$$y(x) = u(x)e^x$$

$$= (C_3 xe^{-2x} + D_1)e^x$$

$$= C_3 xe^{-x} + D_1 e^x$$

基本解系は $\{e^x, xe^{-x}\}$

(例題) $y'' + y = 2e^x$

基本解系は $\{\cos x, \sin x\}$

$$\varphi = \cos x, \psi = \sin x$$

$$\begin{aligned} W &= \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x = 1 \\ &\quad - \int \frac{\sin x \cdot 2e^x}{1} dx \\ &= e^x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$$\int \frac{\cos x 2e^x}{1} dx = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\begin{aligned}\text{一般解は } y(x) &= A_1 \cos x + A_2 \sin x + e^x(\cos x - \sin x) \cos x + e^x(\cos x + \sin x) + \sin x \\ &= A_1 \cos x + A_2 \sin x + e^x\end{aligned}$$