

(問題 6 4)

$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき X^5 を求めよ。

(解答)

(解法のテクニック)

ケーリー・ハミルトンの定理 $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)E$
を用いて次数を下げる。

$$\begin{aligned} (a + d) &= 3 \\ (ad - bc) &= -13 \\ X^2 &= 3X + 13E \\ X^3 &= 3X^2 + 13X \\ &= 3(3X + 13E) - 13X \\ &= 9X + 26E \\ X^4 &= 9X^2 + 26X \\ &= 9(3X + 13E) + 26X \\ &= 53X + 117E \\ X^5 &= X(53X + 117E) \\ &= 53(3X + 13E) + 117X \\ &= 276X + 689E = 276 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 689 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 413 & 828 \\ 828 & 1793 \end{pmatrix} \end{aligned}$$