

ラウス・フルビッツの安定判別法

線形時不変の自由システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

においてすべての初期ベクトル $x(0)$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

となるとき、(大域的) 漸近安定という。

漸近安定であるための必要十分条件は A の固有方程式の実部が負あることである。

n 次固有方程式 $\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$ の根について考える。

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0 \quad (\forall i) \quad \textcircled{1}$$

が成り立てば漸近安定である。

(i) ①が成り立つための必要条件は係数がすべて同符号であることである。

(ii) ①が成り立つための必要十分条件は係数 $\alpha_0 \sim \alpha_n$ から以下に示すラウス表を作ったとき、その最左端に並ぶ係数 $\alpha_0, \alpha_1, b_1, c_1 \dots$ がすべて正であることである。

これをラウス・フルビッツの安定条件という。ラウス表とは

第0行	α_0	α_2	$\alpha_4 \dots$
第1行	α_1	α_3	$\alpha_5 \dots$
第2行	b_1	b_2	$b_3 \dots$
第3行	c_1	c_2	$c_3 \dots$
			$\vdots$

のように $\alpha_0 \sim \alpha_n$ を第1行と第2行に交互に並べる。

第3行以下を次のように作る。ただし係数が存在しないところは零として計算を行う。

第p行	x_1	x_2	$\dots$	x_i	x_{i+1}
第p+1行	y_1	y_2	$\dots$	y_i	y_{i+1}
第p+2行	z_1	z_2	$\dots$	z_i	

$$z_i = -\frac{1}{y_1} \begin{vmatrix} x_1 & x_{i+1} \\ y_1 & y_{i+1} \end{vmatrix} \text{である。}$$

演習問題 3-3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

が安定行列であるための必要十分条件をラウス・フルビッツの安定判別法と、リアプノフ方程式による方法によって求めその等価性を確認せよ。

(解)

が安定行列 $\Leftrightarrow A$ の固有値の実部がすべて負

n 次固有方程式 $\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$ の根について考える。

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0 \quad (\forall i) \quad \textcircled{1}$$

が成り立てば漸近安定である。

ステップ (i) ①が成り立つための必要条件は固有方程式の係数がすべて同符号であることである。

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_2\lambda + a_1$$

λ^3 の係数は1 (>0) より $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ でなければならない。

ステップ (ii) ①が成り立つための必要十分条件は係数 $1 \sim a_3$ から以下に示すラウス表を作ったとき、その最左端に並ぶ係数 $1, a_3, x$ がすべて正であることである。

ラウス表を作ると

$$\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & \\ a_3 & a_1 & \\ \hline & x & \end{array}$$

$$x = -\frac{1}{a_3}(a_1 - a_2a_3)$$

$a_3 > 0$ より $x > 0$ であるための条件は $a_1 - a_2a_3 < 0$

(答え) $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 - a_2a_3 < 0$