２乗積分値の計算

漸近安定な自由システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

について$Q \geq 0$　を重み行列として

$$J = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \qquad ①$$

を計算することを考えよう。$Q = diag[q_1, q_2, \cdots q_n]$とおくと

$$J = \int_0^\infty [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) \cdots q_n x_n^2(t)] dt$$

Jが小さいことは、積分面積が小さいことを意味し、$x_i(t)$が早く０に収束することや振幅が小さいことの目安となる。

また、たとえば出力を$y(t) = Cx(t)$　としたときの２乗積分誤差は

$$J = \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt = \int_0^\infty x(t)^T C^T C x(t) dt$$

とおけるので式①で$Q = C^T C$としたときに相当する。

式①のJは応答計算することなく、リアプノフ方程式を使い

$$J = x(0)^T P x(0) \qquad ②$$

$$P\,A + A^T P = -Q \qquad ③$$

で与えることができる。

[証明]

$$J = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt$$

$$= -\int_0^\infty [x^T (A^T P + PA) x] dt$$

$$= -\int_0^\infty [\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}] dt$$

$$= -\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} x^T P x\right] dt$$

$$= -[x^T P x]_0^\infty$$

$$= -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0)$$

システムが漸近安定より、$x(\infty) = 0$より②式を得る。

ここで①式と②式と$x(t) = e^{At} x(0)$　より、

$$x(0)^T P x(0) = x(0)^T \left[\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At}\right] x(0)$$

リアプノフ方程式の直接表現として

$$P \quad = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

が得られる。