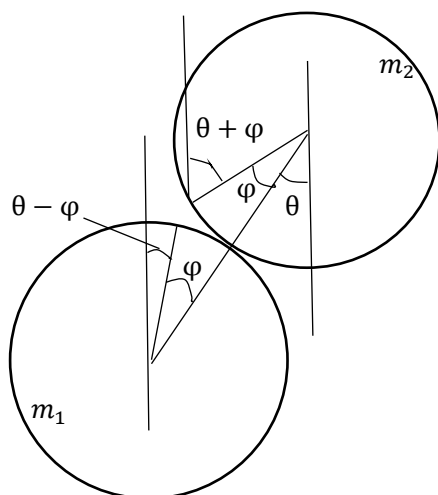


ラグランジュ方程式 エネルギー積分 運動量積分

{9.5} 質量 m_1 ,半径 a の一様な球Aを滑らかな水平面上に置き、質量 m_2 ,半径 a の球Bを球Aの頂上に載せる。球Bが静かに動きだすとき、両球の接触が完全に粗であるとして、両球の中心線が鉛直方向となす角 θ の満たすべき方程式を求めよ。

(解)



全体の重心Gは両球の中心線上を運動するから、球A, Bの中心の座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_2 - x_1 = 2a \sin \theta$$

$x_G = 0$ より

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} 2a \sin \theta$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} 2a \sin \theta$$

$$y_2 = a + 2a \cos \theta$$

両球の慣性モーメントは $I_1 = \frac{2}{5} m_1 a^2, I_2 = \frac{2}{5} m_2 a^2$

ラグランジュアン L は

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta} - \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - U$$

$$U = 2am_2 g \cos \theta$$

$$L = \frac{2a^2}{m_1 + m_2} (m_1 m_2 + m_2^2 \sin^2 \theta) + \frac{a^2}{5} \{ (m_1 + m_2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2(m_2 - m_1) \dot{\theta} \dot{\phi} \} - 2am_2 g \cos \theta$$

L は t と ϕ を含まないから、エネルギー積分($T + U = \text{一定}$)と運動量積分($\partial L / \partial \dot{\phi} = \text{一定}$)

より、

$$\frac{2a^2}{m_1+m_2}(m_1m_2+m_2^2\sin^2\theta)+\frac{a^2}{5}\{(m_1+m_2)(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)+2(m_2-m_1)\}\dot{\theta}\dot{\varphi}+2am_2\cos\theta=2am_2g \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{2}{5}a^2\{(m_2-m_1)\dot{\theta}+(m_1+m_2)\}=0 \quad \textcircled{2}$$

②式より

$$\dot{\varphi}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\dot{\theta} \text{ を①式に代入して}$$

$$(\text{答え}) \quad a\dot{\theta}^2(7m_1+5m_2\sin^2\theta)=5g(m_1+m_2)(1-\cos\theta)$$