(問題４６)

放物線C: $y=x^2$上の点Ａ$(a,\ a^2)$,Ｂ$(b,\ b^2)$をとる。ただし、$b<0<a$とする。

(1) 放物線Cの点Ａにおける接線と点Ｂにおける接線の交点の座標を求めよ。

(2) 放物線Cと直線ＡＢで囲まれる部分の面積Sを求めよ。

(3) 三角形ＯＡＢの面積をRとするとき、$\frac{R}{S}$がとりうる値の最大値を求めよ。 ただし、Ｏは原点である。

(解答)

(1)

$$y' = 2x$$

点Ａにおける接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a)$$

$$y = 2ax - a^2$$

点 Ｂ における接線の方程式は

$$y = 2bx - b^2$$

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

交点のy座標は $2a\left(\frac{a+b}{2}\right) - a^2 = ab$ 交点の座標は$\left(\frac{a+b}{2}\ ,ab\right)$

(2) 直線ＡＢの方程式は $y - a^2 = \frac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)$

$$y = (a+b)x - ab$$

$$S = -\int_b^a x^2 - (a+b)x + ab\,dx$$

$$= -\int_b^a (x-a)(x-b)dx$$

$$= \frac{1}{6}(a-b)^3$$

(3)

$$R = \frac{1}{2}(-ab)(a-b)$$

$$\frac{R}{S} = -\frac{3ab(a-b)}{(a-b)^3}$$

$$= \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

$-b = c$とおくと

$$= \frac{3ac}{(a+c)^2} = \frac{3}{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2} \leq \frac{3}{2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 2} = \frac{3}{4}$$

(答え)最大値：$\frac{3}{4}$