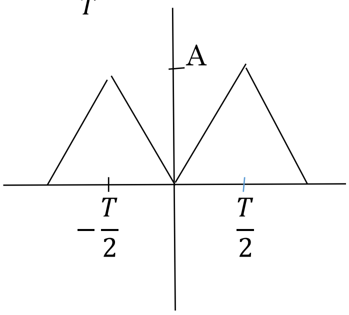
フーリエ級数　三角波

$$u(t) = \begin{cases} \alpha t & \left(0 \le t \le \dfrac{T}{2}\right) \\ -\alpha t & \left(-\dfrac{T}{2} \le t \le 0\right) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2A}{T}$$



変数変換

$$x = \frac{2\pi t}{T}$$

とおく。このとき

$$u(t) = \beta|x|$$

ただし$\beta = \frac{T}{2\pi}\alpha$

このときフーリエ級数は偶関数より

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

フーリエ級数は

$$a_0 = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \beta\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \beta x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2\beta}{\pi}\frac{1}{n^2}\{(-1)^n - 1\}$$

$$f(x) = \beta\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)\right]$$

再びtに変数変換すると

$$f(t) = \frac{T}{2\pi}\alpha\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{T}(2m+1)t}{(2m+1)^2}\right]$$