(問題７)

整数を係数とする ３ 次多項式$f(x)$が次の条件を満たしている。

条件：任意の自然数nに対して、$f(n)$は$n(n+1)(n+2)$で割り切れる。

このときある整数aがあって$f(x)=ax(x+1)(x+2)$となることを示せ。

(解答)

（解法のテクニック）

まず、$f(x)=ax(x+1)(x+2)+bx(x+1)+cx+d$ (a, b, c, dは整数)とおく。 $f(n)$を

nで割ると$a(n+1)(n+2)+b(n+1)+c+\frac{d}{n}$ $f(n)$はnで割りきれるから、

$\frac{d}{n}$=k(kは整数) $d=nk$ nは任意の自然数より$d=k=0$ でなければならない。

$f(n)$を$n+1$ で割ると$an(n+2)+bn+\frac{c}{n+1}$

$f(n)$は$n+1$ で割りきれるから、$\frac{c}{n+1}=l$(lは整数)

$c=(n+1)l$ 同様にして、$c=l=0$

$f(n)$を$n(n+1)(n+2)$で割ると $a+\frac{b}{n+2}$

$f(n)$は$n(n+1)(n+2)$で割り切れるから、$\frac{b}{n+2}=m$ (mは整数)

同様にして、$b=m=0$

$\therefore f(x)=ax(x+1)(x+2)$