

1 次元の空間において波動関数が

$$\psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right)$$

で与えられるガウス波束について \hat{p} の分散 $\langle(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)^2\rangle$ を計算せよ。

(解)

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx'}$$

$$\begin{aligned} \langle(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle\hat{p}\rangle \right)^2 \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} + \hbar^2 k_0^2 \right) \psi(x) dx \dots \dots \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

まず、 $\langle\hat{p}\rangle = \hbar k_0$ を証明する。

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right] \cdot \left(i\hbar \frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + \hbar k_0 \right)$$

となるから

$$\begin{aligned} \therefore \langle\hat{p}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) - i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \cdot \left(i\hbar \frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + \hbar k_0 \right) \\ &= \hbar k_0 \end{aligned}$$

(\because 奇関数の $-\infty \sim \infty$ の積分は 0. 偶関数と奇関数の積は奇関数。)

$$\begin{aligned} &-i\hbar \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \psi(x) \right) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \left[\left\{ \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right\} \cdot \left(i\hbar \frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + \hbar k_0 \right) \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \left[\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right)' \cdot \left(i\hbar \frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + \hbar k_0 \right) + \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{i\hbar}{2\sigma^2} \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \cdot \left[\left(-\frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + ik_0 \right) \left(i\hbar \frac{(x-x_0)}{2\sigma^2} + \hbar k_0 \right) + \frac{i\hbar}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \cdot \left[-i\hbar \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} - \hbar k_0 \frac{(x-x_0)}{\sigma^2} + i\hbar k_0^2 + \frac{i\hbar}{2\sigma^2} \right] \\
&\quad - i\hbar \frac{d}{dx} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \left[-\hbar^2 \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + i\hbar^2 k_0 \frac{(x-x_0)}{\sigma^2} + \hbar^2 k_0^2 + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \right] \cdots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

$$2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} \psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right] \cdot \left(-i\hbar^2 k_0 \frac{(x-x_0)}{\sigma^2} - 2\hbar^2 k_0^2 \right) \cdots \textcircled{3}$$

②、③式より

$$\begin{aligned}
&\left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} \right) \psi(x) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right] \cdot \left(-\hbar^2 \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} - \hbar^2 k_0^2 \right) \\
&\left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} + \hbar^2 k_0^2 \right) \psi(x) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right] \cdot \left(-\hbar^2 \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

ψえに①式は

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} + \hbar^2 k_0^2 \right) \psi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \right] \cdot \left(-\hbar^2 \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \cdot \left(-\hbar^2 \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \right) dx
\end{aligned}$$

ガウス積分して

$$= \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

$$\begin{aligned}
(\text{答え}) \quad &\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2i\hbar^2 k_0 \frac{d}{dx} + \hbar^2 k_0^2 \right) \psi(x) dx \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}
\end{aligned}$$