(問題１０９)

実数αについて$[\alpha]$はαを超えない最大の整数とする。

既約分数$\frac{p}{q}\,(0<p<q)$について，数列$\{a_n\}(0\leq a_n<1)$を

$$a_n=\frac{np}{q}-\left[\frac{np}{q}\right],n=1,2,3,\cdots$$

とおく。

(1) $n-m$がqで割り切れるとき，$a_n=a_m$を示せ。

(2) $a_1,a_2,\cdots,a_q$は相異なるq個の数であって、更に

$$a_1+a_2+\cdots+a_q=\frac{q-1}{2}$$

を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$を求めよ。

(解答)

(1)

$n-m=kq$（kは整数）とおくと

$$a_n=\frac{np}{q}-\left[\frac{np}{q}\right]$$

$$=\frac{(m+kq)p}{q}-\left[\frac{(m+kq)p}{q}\right]$$

$$=\frac{mp}{q}+kp-\left[\frac{mp}{q}+kp\right]$$

$$=\frac{mp}{q}+kp-\left[\frac{mp}{q}\right]-kp$$

$$=\frac{mp}{q}-\left[\frac{mp}{q}\right]$$

(2)

$a_n=a_m(1\leq n,m\leq q,n\geq m)$のとき

$$\frac{np}{q}-\left[\frac{np}{q}\right]=\frac{mp}{q}-\left[\frac{mp}{q}\right]$$

$$\frac{np}{q}-\frac{mp}{q}=\left[\frac{np}{q}\right]-\left[\frac{mp}{q}\right]$$

$$\frac{(n-m)p}{q}=\left[\frac{np}{q}\right]-\left[\frac{mp}{q}\right]$$

右辺は整数となるから

$n-m$はqで割り切れる。

$0 \leq n-m \leq q-1$ となるから

$n-m$がqで割り切れるための条件は

$$n-m=0$$

$$n=m$$

$a_n=a_m \Rightarrow n=m$より対偶をとると

$$n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m$$

ゆえに$a_1, a_2, \cdots, a_q$は相異なるq個の数である。

組$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$を順$\{b_1, b_2, \cdots, b_n | b_k < b_{k+1}\}$に置き換えると

$$a_n=\frac{np}{q}-\left[\frac{np}{q}\right]$$

$$=\frac{np}{q}-l\left(l\text{は整数}\right)$$

$$=\frac{np-lq}{q}$$

$$=\frac{j}{q}\left(j\text{は整数}\right)\text{とおくと}$$

$0 \leq a_n < 1$ より

$$0 \leq \frac{j}{q} < 1$$

$$b_k=\frac{j_k}{q}\text{とおくと}$$

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_q \cdots ①$$

$$0 \leq j_k < q \cdots ②$$

①，②より $j_1=0, j_2=1, \cdots, j_k=k-1, \cdots, j_q=q-1$

$$b_k=\frac{k-1}{q}$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_q$$

$$=b_1+b_2+\cdots+b_q$$

$$=\sum_{k=1}^{q}\frac{k-1}{q}$$

$$=\frac{1}{q}\left\{\frac{q(q+1)}{2}-q\right\}$$

$$=\frac{q-1}{2}$$

(3)

$n=kq+r(k,r$は整数で$0\leq r\leq q-1)$とおく。

$$\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{kq}\right)\leq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\leq\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{(k+1)q}\right)\text{となり}$$

$$\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{kq}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{kq-1}{2}>\frac{1}{n}\cdot\frac{kq-k}{2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot k$$

$$=\frac{(q-1)k}{2(kq+r)}>\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{k}{k+1}$$

$$\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{(k+1)q}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{(k+1)(q-1)}{2}$$

$$=\frac{(q-1)(k+1)}{2(kq+r)}\leq\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{k+1}{k}$$

$n\to\infty$のとき$k\to\infty$より

$$\lim_{k\to\infty}\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{k}{k+1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=\frac{q-1}{2q}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{k+1}{k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{q-1}{2q}\cdot\frac{1+\frac{1}{k}}{1}=\frac{q-1}{2q}$$

はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\boldsymbol{\frac{q-1}{2q}}$$