(問題２３)

$x^2 + x + 2 = 2\sqrt{(x^2 + x + 2 - a)}$が４つの異なる実数解をもつための$a$の範囲を求めよ。

(解答)

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

与式の根号内は０以上より

$$x^2 + x + 2 - a \geq 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} - a \geq 0$$

$$\frac{7}{4} \geq a$$

$x^2 + x + 2 = X$とおく。

$X > \frac{7}{4}$であればxについての２次方程式$x^2 + x + 2 = X$は異なる２つの実数解をもつ。

与式の両辺を２乗すると

$$X^2 = 4X - 4a$$
$$f(X) = X^2 - 4X + 4a$$

Xについての２次方程式$f(X) = 0$が$X > \frac{7}{4}$の範囲に異なる２つの実数解をもてばxは４つの異なる実数解をもつ。

その条件は$f\left(\frac{7}{4}\right) > 0$と判別式$D > 0$と軸が$\frac{7}{4}$よりも大きいことである。

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16} - 7 + 4a > 0$$

$$\therefore a > \frac{63}{64}$$

判別式$D = 4 - 4a > 0 \Rightarrow 1 > a$

軸は$2 > \frac{7}{4}$

(答え)$\frac{63}{64} < a < 1$