線形代数 I

§2. 写像

Def1.2

X, Y：集合

$f: X \to Y$：写像$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Xの各要素xについてYの要素yをひとつ対応させる方法がf

注：X, Yが数の集合のとき写像を関数という。

Def1.4 $f: X \to Y$

(1) fが単射、1 対 1 写像$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X \ni x, x', x \neq x'$

$\Rightarrow f(x) \neq f(x')$

(2) fが全射、上への写像$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Yの任意の元yについて$f(x) = y$となる$x \in X$が存在する。

(3) fが単射かつ全射＝全単射

§3. 行列式

Def4.1

A. 1$D_n\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \alpha \boldsymbol{a'}_{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{\beta a''}_{\boldsymbol{j}} \cdots \boldsymbol{a_n}\right)$

$= \alpha D_n\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a'}_{\boldsymbol{j}} \cdots \boldsymbol{a_n}\right) + \beta D_n\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a''}_{\boldsymbol{j}} \cdots \boldsymbol{a_n}\right)$ （列に対する多重線形性）

A. 2$D_n\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_j} \cdots \boldsymbol{a_j} \cdots \boldsymbol{a_n}\right) = 0$ （退化条件）

A. 3$D_n\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$ （正規化条件）

Prop4.2

P-1 $\det(\cdots \boldsymbol{0} \cdots) = 0$

P-2 $\det\left(\cdots \boldsymbol{a_j} \cdots \boldsymbol{a_k} \cdots\right)$

$= -\det\left(\cdots \boldsymbol{a_k} \cdots \boldsymbol{a_j} \cdots\right)$ （交代性）

P-3 $\det\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_j} \cdots \boldsymbol{a_k} \cdots \boldsymbol{a_n}\right)$

$= \det\left(\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_j} \cdots \alpha \boldsymbol{a_j} + \boldsymbol{a_k} \cdots \boldsymbol{a_n}\right)$

例 4.1 上半三角行列

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

第 1 列$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \cdot \alpha_n$$

Prop4.5 A: n次正方行列について

det A=$\sum_{[i_1,i_2,\cdots i_n]\epsilon S}(-1)^{N[i_1,i_2,\cdots i_n]} a_{i_1 1} \times a_{i_2 2} \times \cdots a_{i_n n}$

$\sum_{[i_1,i_2,\cdots i_n]\epsilon S}$ は$[i_1, i_2, \cdots i_n]$: $1 \sim n$の順列

① 1〜nの順列をn通り考え、それぞれ$a_{i_1 1} \times a_{i_2 2} \times \cdots a_{i_n n}$を計算して和をとる。

② Def4.2 $\sigma = [i_1, i_2, \cdots i_n]$: $1 \sim n$の順列

$N_\sigma = N_{[i_1,i_2,\cdots i_n]}$: 反転数

=”各i_k” $k = 2 \cdots n$の前に

i_kより大きな数がいくつあるかの総則

例題 4.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$の行列式を求めよ。

$[i_1, i_2, i_3]$	$N_{[i_1,i_2,i_3]}$	$a_{i_1 1} \times a_{i_2 2} \times a_{i_3 3}$	$(-1)^{N[i_1,i_2,i_3]} a_{i_1 1} \times a_{i_2 2} \times a_{i_3 3}$
1 2 3	0	1× 3 × 2	6
1 3 2	1	1×1×1	−1
2 1 3	1	2×2×2	−8
2 3 1	2	2×1×3	6
3 1 2	2	3×2×1	6
3 2 1	3	3×3×3	−27
			$\sum = -18$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$