線形代数 I

問.一次写像$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$が

$f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$を満たすとする。

このとき、fを表現する行列A　を次の手順で求めよ。

(1)$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$について$\boldsymbol{e}_i = a_i\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + b_i\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$(i=1,2)としたときの

a_1, b_1, a_2, b_2を求める。

(2)(1)の結果を用いて$f(\boldsymbol{e}_i)$を求める。

(3) (2)の結果を用いて行列A　を求める。

(解)

(1)

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1 = 2a_1 - b_1\\0 = 3a_1 + 2b_1\end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2}{7}, b_1 = -\frac{3}{7}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{2}{7}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}0 = 2a_1 - b_1\\1 = 3a_1 + 2b_1\end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{7}, b_1 = \frac{2}{7}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

(2)線形性より$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{2}{7}f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{7}f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} - \frac{3}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}8\\1\\-3\end{pmatrix}$

$f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{7}f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{7}f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix}$

(3) $A = (f(\boldsymbol{e}_1) \quad f(\boldsymbol{e}_2)) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}8 & -3\\1 & 4\\-3 & 7\end{pmatrix}$