

オイラー方程式

[問題 2. 7] 長さ l , 線密度 ρ の弦を張力 T で引っ張ったときに、これに発生する振動を考えよう。位置 x , 時刻 t における弦の変位を $u(x, t)$ とすると、この系のラグランジアンは

$$L = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

で与えられる。ハミルトンの原理

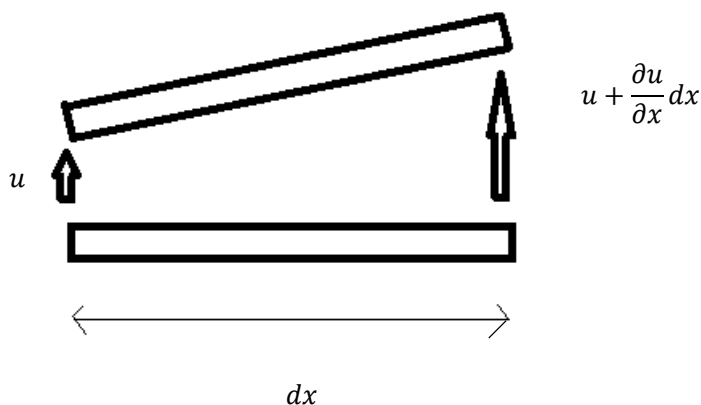
$$\delta \int_0^l L dt = 0$$

を適用して、オイラー方程式から運動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を導け。

(解)



弦の微小素片が図のように変化すると、元の長さが

$$\sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2}$$

に伸びる。張力 T に抗して伸びるのでポテンシャルエネルギーは

$$T dx \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right]$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1 \text{ より}$$

$$=\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

$u(x,t)$ の位置が指定されているので、オイラー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial f}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$